

LICENCE SCIENCE DE LA MATIÈRE
École Normale Supérieure de Lyon
Université Claude Bernard Lyon I

Stage 2020-2021
Perez Lucas
L3 Physique

Quantification des effets de diffusion numérique lors de la formation des disques pré-stellaires

Résumé : *Pour étudier avec précision la physique de l'Univers, une compréhension approfondie de la formation des étoiles est primordiale. En effet, leur développement régit le cosmos par des mécanismes de rétro-action tels que les jets de matière. Un point anguleux réside encore aujourd'hui dans la formation des disques pré-stellaires, qui donnent naissance aux futurs systèmes planétaires, consécutivement à l'effondrement des cœurs denses. En particulier, des données comme la masse de ces disques ou leur rayon doivent être simulées numériquement.*

L'objectif de ce stage est donc de réaliser des expériences numériques pour étudier l'influence de la grille de maillage sur l'évolution des disques. Nous utiliserons pour cela le code multidimensionnel de magnétohydrodynamique à raffinement de maillage adaptatif (AMR, adaptative mesh refinement) RAMSES (Teyssier 2002 [1]) dont nous détaillerons le principe de fonctionnement. L'étude portera sur la quantification de l'influence du maillage sur grille et de la discrétisation en volume fini sur les propriétés du disque (masse, moment angulaire, rayon etc.). En effet, les observations montrant qu'il n'y a pas d'alignement préférentiel entre les disques et la direction du champ magnétique [2], on souhaite s'assurer que les outils numériques reproduisent ces comportements.

Mots clés : Formation d'étoiles, disques pré-stellaire, AMR, code RAMSES, simulations

Stage encadré par :

Benoît Commerçon

benoit.commercon@ens-lyon.fr / tél. (+33) 4 72 72 89 17

Centre de recherche en Astrophysique de Lyon CRAL

Site Monod de l'École Normale Supérieure de Lyon

46, avenue d'Italie, 69007 Lyon, FRANCE

Téléphone : (+33) 4 72 72 80 00

<https://cral.univ-lyon1.fr/>



CENTRE DE RECHERCHE ASTROPHYSIQUE DE LYON

8 août 2021

Remerciements

Pour commencer ce rapport, je tiens à remercier tout particulièrement bien sûr Benoît Commerçon pour avoir accepté de me prendre en stage malgré le contexte difficile et ma demande tardive, et m'avoir encadré durant ces deux mois pour m'instruire à la formation des disques pré-stellaires ainsi qu'aux méthodes numériques permettant leurs simulations. Il va sans dire que cette première expérience au sein d'un laboratoire fut passionnante et pleine d'enrichissements, sans aucune mesure avec ce que l'on peut vivre autrement au cours de nos études.

Je tiens également à remercier chaleureusement toute l'équipe du CRAL pour les moments de convivialité passés ensemble, autour d'un café, moments réjouissants, stimulants et rafraîchissants, ainsi que le centre Blaise Pascal de l'ENS de Lyon, et son régisseur Emmanuel Quemener, pour l'utilisation des machines et son aide.

Enfin, je tenais également à remercier tous mes collègues du département physique ayant eux aussi réalisés leur stage au sein du laboratoire de l'ENS et avec lesquels j'ai partagé des moments plaisants autour de multiples repas et parties de cartes. Nous avons ainsi, à notre manière, pu recréer le sentiment de convivialité d'un laboratoire au cours de ces huit semaines, après cette année si particulière.

Table des matières

Introduction	3
1 Principes généraux de la formation des étoiles	3
1.1 Les étapes du cycle stellaire	3
1.2 Physique de la formation stellaire	5
1.2.1 Les énergies au sein du nuage de gaz parfait sphérique et homogène	5
1.2.2 Théorème du Viriel	6
1.2.3 Longueur et masse de Jeans	7
1.2.4 Temps de chute libre	7
1.2.5 Conservation du moment angulaire et du flux magnétique	8
1.2.6 Equations de la MHD idéale	8
2 Le code RAMSES : outil de simulations numériques	8
2.1 Les bases du code et les critères de raffinement	9
2.2 Le contrôle des conditions initiales	10
3 Simulations numériques et résultats	11
3.1 Définition du cas de référence	11
3.1.1 Variation des paramètres physiques	12
3.1.2 Variation des paramètres numériques	12
3.2 Etude paramétrique pour le cas hydrodynamique	15
3.2.1 Désalignement de l'axe de rotation	15
3.2.2 Influence du solveur de Riemann et de la résolution numérique	16
3.3 Étude paramétrique en MHD idéale	17
3.3.1 Alignement du champ magnétique et de l'axe de rotation	17
3.3.2 Désalignement	18
Conclusions et perspectives	19
A Demonstrations	22
B Liste des simulations	27
C Diffusion ambipolaire	28

Introduction

Le contenu de ce rapport synthétise les huit semaines de mon stage de L3 Sciences de la Matière, du 31 mai au 23 juillet, sous la tutelle de Benoît Commerçon, au sein de l'équipe AstroENS du Centre de Recherche en Astrophysique de Lyon (CRAL), sur le site de l'ENS de Lyon.

Le sujet du stage, essentiellement numérique, traite de l'influence du maillage sur grille sur la formation des étoiles de faible masse et notamment sur la formation des disques pré-stellaires. Il convenait, au travers d'expériences numériques, de vérifier l'évolution des quantités physiques pertinentes lors de la variation des paramètres numériques qui caractérisent la simulation et dont le détail sera donné ci-dessous. L'objectif principal était ainsi de désaligner les vecteurs rotation et champ magnétique vis-à-vis de l'axe de la grille et d'observer, ou non, une variation quantitative de ces quantités physiques.

Dans ce rapport, je rendrai d'abord compte des principes de la formation stellaire, à travers son cycle et les outils théoriques qui la caractérise. Ensuite, je présenterai les éléments du code RAMSES que j'ai dû utiliser au cours de mon stage. Enfin, je terminerai par la présentation de mon protocole expérimental et de mes résultats, au travers une évolution des quantités mesurées.

1 Principes généraux de la formation des étoiles

1.1 Les étapes du cycle stellaire

L'étude de la formation stellaire est centrale en astrophysique. En effet, de nombreuses interrogations et de nombreux sujets ont trait avec la manière dont se forment et évoluent les étoiles au sein du milieu interstellaire. D'une échelle moyenne au sein de l'Univers, entre les galaxies qui les rassemblent et les planètes gravitant autour d'elles, les étoiles ont, au cours de leur vie, de nombreuses rétroactions sur leur milieu environnant.

Ainsi, la formation de *supernovae* à la "mort" des étoiles massives, les vents solaires et radiations, le gaz environnant ou encore les *outflows* et leur éjection de matière perturbent et influencent les astres présents à proximité de ces étoiles. Ces mécanismes, ainsi que la présence de disques entourant les étoiles en formation sont corroborés par les observations astronomiques actuelles. Cependant, l'observation de la naissance d'étoiles étant rendu complexe par la rareté de cet évènement, sa durée limitée dans le temps (de l'ordre de de la centaine de milliers d'années) ainsi que les limites de résolution des télescopes actuels (de l'ordre de l'unité astronomique), il est impératif d'utiliser des simulations numériques et des modèles théoriques pour reproduire au mieux ces phénomènes stellaires.

Le processus de formation des étoiles débute en premier lieu dans le Milieu Inter Stellaire (MIS) composé à 99 % de gaz et 1 % de poussières en masse [3]. La densité ρ est d'environ une particule par cm^3 . Les nuages moléculaires, immenses amas de gaz dont l'échelle spatiale est de l'ordre de 10–100 pc et lieux de naissance des étoiles, ne représentent en réalité qu'une faible part du MIS (1% en volume et 20% en masse). Ces nuages sont plus froids (70 K contre 10^3 K) mais surtout plus denses (100 particules par cm^3) que celui-ci et se forment sous l'effet d'une instabilité thermique. Ensuite, sous l'effet de l'instabilité gravitationnelle mais également des rétroactions évoquées ci-dessus, ces nuages moléculaires vont se fragmenter pour former des cœurs denses dont la densité est de l'ordre de 10^7 particules par cm^3 , sur des échelles d'espace de l'ordre de 0.1 pc. Finalement, c'est l'instabilité gravitationnelle de ces cœurs denses qui va conduire à leur effondrement et à la naissance des étoiles. On peut alors distinguer plusieurs phases.

- **La phase pré-stellaire.** Cette phase caractérise la première phase de l'effondrement. Sa durée moyenne est de l'ordre de quelques dizaines de milliers d'années (*kyr* pour kilo-year). Sous l'effet de sa propre gravité, le cœur dense se contracte et l'énergie gravitationnelle augmente, avant d'être évacuée par rayonnement thermique grâce aux poussières (Larson, 1969 [4]). On observe

alors un profil de densité $\rho \propto r^{-2}$. Le gaz poursuit sa contraction jusqu'à atteindre une densité critique $\rho \sim 10^{-13} \text{ g cm}^{-3}$. À ce moment, le gaz devient optiquement épais, empêchant les photons de s'en extraire. Le gaz chauffe adiabatiquement, et son indice adiabatique augmente pour atteindre $\gamma = 5/3$: le premier cœur de Larson est formé. Son rayon caractéristique est de l'ordre de 10 AU, et sa masse de l'ordre de $0.01 M_{\odot}$. Sa température continue alors d'augmenter jusqu'à atteindre $T = 100 \text{ K}$ où les degrés de rotation du dihydrogène sont dégelés. Le dihydrogène n'est plus dans son état fondamental, et l'indice adiabatique chute à $\gamma = 7/5$. Mais ce n'est que lorsque la température atteint 2000 K que celui-ci chute à $\gamma \sim 1.1$, sous la valeur critique de $4/3$ nécessaire pour une sphère supportée par sa gravité (1.18), du fait d'une énergie suffisante pour permettre la dissociation du dihydrogène. Se produit alors le *second effondrement*, et la création du second cœur de Larson dont le rayon typique est sensiblement le même que celui du premier mais dont la densité atteint $\sim 1 \text{ g cm}^{-3}$. Le détail de ce processus est illustré figure (1.1).

- **La phase proto-stellaire.** Cette phase est la phase d'accrétion principale. C'est lors de celle-ci que l'objet hydrostatique formé à la phase précédente accrète la majorité de sa masse. Du fait du support rotationnel initial et de la conservation du moment angulaire, un disque d'accrétion se forme autour de celui-ci, phénomène corroboré par les observations. De plus, il est également observé la formation d'outflows et de jets, parallèles à l'axe de rotation du disque.
- **La phase de séquence pré-principale.** Au commencement de cette phase, la proto-étoile a accrété la majorité de sa masse finale. Sa température a atteint $T \sim 10^6 \text{ K}$, et elle commence à brûler le deutérium. Elle poursuit durant ce temps sa contraction, de façon quasi-statique, et n'atteint la phase de séquence principale que lorsqu'elle démarre la fusion de son hydrogène, à $T \sim 10^7 \text{ K}$: l'étoile est née. On parle alors d'étoile T Tauri, en référence à l'étoile T Tauri découverte en 1852 par John Russel Hind, première étoile de ce type à avoir été formellement observée.

Au cours de ce rapport, et lors de mon travail, je me suis essentiellement limité à la période couvrant le premier effondrement, la formation du premier cœur de Larson et du premier disque pré-stellaire, sur des périodes de moins de 100 kyr.

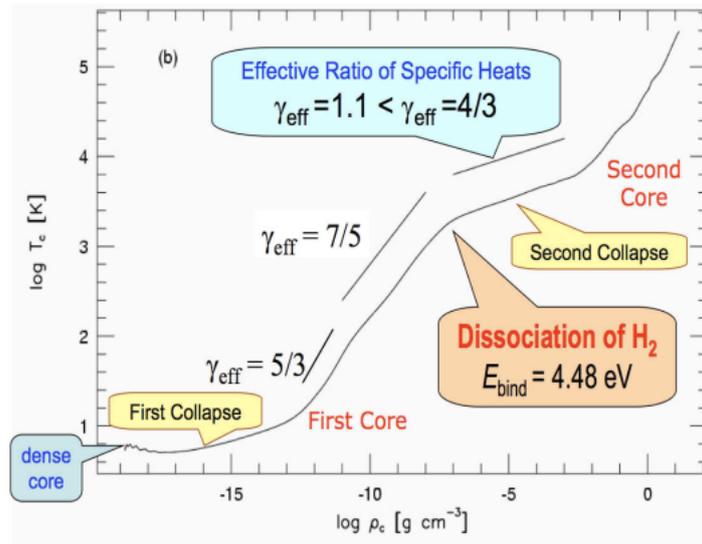


FIGURE 1.1 – Évolution de la température selon la densité au centre d'un nuage moléculaire sphérique après son effondrement. On y observe les différentes phases, premier effondrement, formation du premier cœur, second effondrement dû à la dissociation du dihydrogène et finalement la formation du second cœur. Tiré de Andre et al. (2008) [5] et réalisé d'après les résultats de Masunaga and Inutsuka (2000b).

1.2 Physique de la formation stellaire

La formation des étoiles, et notamment l'effondrement gravitationnel des nuages moléculaires, requiert nombre de résultats mathématiques que nous allons développer dans cette section. De plus, un élément important à prendre en compte est le fait que toutes les énergies entrant en jeu dans l'effondrement des étoiles (énergie magnétique, thermique, gravitationnelle etc.) sont du même ordre de grandeur à savoir 1 eV cm^{-3} au sein du MIS. Dès lors, il est fondamental de prendre en compte tous ces mécanismes pour concevoir un modèle fiable. Dans ce travail, nous considérerons l'effondrement d'un nuage sphérique homogène isotrope composé de gaz parfait amené à s'effondrer sous l'effet de sa propre gravité.

1.2.1 Les énergies au sein du nuage de gaz parfait sphérique et homogène

Pour un nuage de gaz parfait sphérique et homogène, le théorème d'équipartition de l'énergie et les trois degrés de liberté de chaque particule permettent de quantifier l'énergie thermique du système. On aboutit alors à

$$E_{\text{th}} = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3 M k_B T}{2 \mu_{\text{mol}} m_H}, \quad (1.1)$$

où N est le nombre total de particules contenues au sein du nuage. On estime ensuite ce nombre N à l'aide de la masse M du nuage ainsi que de la masse m_H d'un atome d'hydrogène, à l'aide du paramètre μ_{mol} qui quantifie la masse moyenne d'une particule du nuage. On détermine alors la valeur $\mu_{\text{mol}} = 2.375$, en considérant un mélange composé à 81% de dihydrogène et à 19% d'hélium.

Il est ensuite nécessaire de déterminer l'énergie potentielle gravitationnelle de constitution de notre modèle. Le calcul, dont le détail est donné en annexe, repose sur le théorème de Gauss gravitationnel et donne le résultat

$$\Omega = -\frac{3}{5} \frac{GM}{R}. \quad (1.2)$$

En poursuivant, on définit l'énergie liée à la rotation solide de la sphère de gaz autour de son axe. On calcule pour cela son moment d'inertie, qui vaut

$$I = \frac{2MR^2}{5}. \quad (1.3)$$

Pour une rotation autour d'une axe fixe à la vitesse angulaire ω_0 on a alors l'énergie de rotation

$$E_{\text{rot}} = \frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{M\omega_0^2 R^2}{5}. \quad (1.4)$$

Enfin, en présence de champ magnétique \mathbf{B} au sein du nuage de gaz, celui-ci dispose d'une énergie magnétique de valeur

$$E_{\text{mag}} = \frac{B^2}{2\mu_0} V = \frac{2\pi B^2}{3\mu_0} R^3 \propto B^2 R^3. \quad (1.5)$$

Pour paramétrer ces différentes composantes énergétiques au sein des simulations on introduit des variables contrôlant le rapport entre celles-ci. Ces éléments seront les conditions initiales de la simulation, comme décrit au paragraphe 2.2. En premier lieu, le paramètre α définit le rapport des énergies thermique et gravitationnelle

$$\alpha = \frac{E_{\text{th}}}{|\Omega|} = \frac{5}{2} \frac{R k_B T}{G \mu_{\text{mol}} m_H M}. \quad (1.6)$$

On remarque que ce paramètre est proportionnel à R_0 , ce qui implique qu'augmenter le support thermique initiale produira des disques de rayon plus grand comme décrit à l'équation 1.22.

Le paramètre β , quant à lui, définit le rapport de l'énergie de rotation et de l'énergie gravitationnelle

$$\beta = \frac{E_{\text{rot}}}{|\Omega|} = \frac{1}{3} \frac{R^3 \omega_0^2}{GM} = \frac{\omega_0^2}{4\pi\rho_0 G}. \quad (1.7)$$

Enfin, nous introduisons le paramètre μ qui contrôle l'énergie magnétique au sein de notre système. Le champ magnétique est ainsi initialement supposé uniforme. On exprime alors μ comme le rapport de la masse sur le flux du champ magnétique et de cette valeur critique ie.

$$\mu = \frac{M/\Phi}{(M/\Phi)_c}, \quad (1.8)$$

où $\Phi = \pi BR^2$ est le flux du champ magnétique au travers la sphère. Pour le système étudié, ce rapport critique qui correspond à la valeur du champ magnétique nécessaire pour supporter la force de gravitation du nuage a été obtenu théoriquement par Mouschovias et Spitzer en 1976 [6] et vaut

$$\left(\frac{M}{\Phi}\right)_c = \frac{\zeta}{3\pi} \left(\frac{5}{G}\right)^{1/2}, \quad (1.9)$$

où $\zeta \approx 0.53$.

1.2.2 Théorème du Viriel

Permettant de relier les contributions d'énergie thermique, cinétique et potentielle, le théorème du Viriel est à l'origine de nombreuses applications. Il permet notamment de décrire à l'équilibre les structures auto-gravitantes tels les nuages moléculaires qui précèdent la formation des cœurs et disques pré-stellaires. Considérons tout d'abord une particule de masse m , de vecteur position \mathbf{r} et soumis à la somme des forces \mathbf{F} . La 2^{nd} loi de Newton s'écrit

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}. \quad (1.10)$$

Pour un système à l'équilibre, et à l'aide d'un développement du principe fondamental de la dynamique réalisé en annexe, nous aboutissons donc au théorème du Viriel

$$0 = 2\mathcal{T} + \Omega, \quad (1.11)$$

où \mathcal{T} représente l'énergie macroscopique du système considéré (à savoir la somme de l'énergie thermique et de l'énergie cinétique) et Ω son énergie potentielle.

Sous l'hypothèse simplifiée d'un nuage moléculaire dont le support thermique balance son effondrement gravitationnel, l'équation (1.11) associée aux expressions des énergies thermique (1.1) et gravitationnelle (1.2) permet de donner un critère de stabilité sur la masse critique du disque qu'il est nécessaire de dépasser pour provoquer le dit effondrement

$$3 \frac{M k_B T}{\mu_{\text{mol}} m_H} < \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}, \quad (1.12)$$

i.e. en isolant la masse dans cette équation

$$M_{\text{crit}} = \left(\frac{5 k_B T}{G \mu_{\text{mol}} m_H} \right)^{3/2} \left(\frac{4}{3} \pi \rho \right)^{-1/2}. \quad (1.13)$$

Nous chercherons ainsi à dépasser cette valeur de masse critique au cours des simulations afin de démarrer le processus de premier effondrement (figure 1.1) et atteindre la formation du premier cœur de Larson.

1.2.3 Longueur et masse de Jeans

Deux notions fondamentales permettant de caractériser l'effondrement gravitationnel sont la longueur et la masse de Jeans, dont la définition est donnée par James Jeans en 1902 [7]. Pour l'établir, nous raisonnons sur un milieu infini, statique, isotherme et de densité homogène, que l'on soumet à une perturbation infinitésimale.

On réalise alors un développement perturbatif au premier ordre des quantités fondamentales du système, ρ , P , Φ et \mathbf{v} , en notant d'un indice 0 les quantités à l'équilibre et d'un indice 1 les quantités perturbées, où l'on note Φ le potentiel lié au champ gravitationnel présent dans notre milieu. La caractéristique statique de celui-ci induit de plus que $\mathbf{v}_0 = 0$.

Le développement des équations de conservation d'Euler, réalisé en annexe, conduit à l'équation de dispersion suivante, en considérant une perturbation harmonique de $\rho_1 = K e^{i(\omega t + kx)}$ ainsi que la vitesse du son isotherme (constante) $c_s^2 = P_0/\rho_0 = k_B T/\mu_{\text{mol}} m_H$

$$\omega^2 = c_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0. \quad (1.14)$$

Le vecteur d'onde \mathbf{k} pouvant s'écrire comme $k = 2\pi/\lambda$, et les modes d'instabilité apparaissant lorsque $\omega^2 < 0$, ce critère définit un vecteur d'onde maximal, le vecteur d'onde de Jeans

$$k < k_J = \left(\frac{4\pi G}{c_s^2} \rho_0 \right)^{1/2}. \quad (1.15)$$

On définit alors la longueur de Jeans comme

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = \sqrt{\frac{\pi}{G}} c_s \rho_0^{-1/2}. \quad (1.16)$$

Et finalement, à partir de celle-ci, on définit la masse de Jeans

$$M_J = \frac{4\pi}{3} \rho_0 \lambda_J^3 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\pi k_B T}{\mu_{\text{mol}} m_H G} \right)^{3/2} \rho_0^{-1/2}. \quad (1.17)$$

On remarquera que cette valeur, représentant la masse maximale théorique nécessaire à un nuage de gaz homogène et isotherme pour s'effondrer sous l'effet de sa propre gravité, est similaire à celle obtenue à l'aide du théorème du Viriel, ceci dû aux approximations de notre modèle.

Considérons maintenant un gaz d'indice polytropique γ et dont on relie la pression et la masse volumique suivant la loi $P \propto \rho^\gamma$. En reprenant les calculs, on établit une dépendance entre la masse de Jeans et la masse volumique

$$M_J \propto \rho^{3/2\gamma-2}. \quad (1.18)$$

Cette dépendance nous donne une valeur critique de l'indice adiabatique $\gamma_{\text{crit}} = 4/3$, au-delà de laquelle le système est de nouveau gravitationnellement instable. La figure 1.1 illustre ce résultat.

1.2.4 Temps de chute libre

Une fois assuré de l'effondrement de notre nuage moléculaire, il est nécessaire de déterminer le temps requis pour réaliser cet effondrement sous le seul effet de la force gravitationnelle. Ce temps de chute libre que l'on note t_{ff} (free-fall time) peut se calculer à l'aide de la 2nd loi de Newton, en conservant les hypothèses précédentes d'un nuage sphérique de densité uniforme. Considérons la coquille extérieure de rayon r à l'instant t , et de rayon initial a . La masse interne du nuage est notée $M(a)$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{M(a)}{r^2} = -G \frac{4\pi \rho_0 a^3}{3r^2}. \quad (1.19)$$

La résolution de cette équation, détaillée en annexe, permet d'accéder au temps nécessaire pour que le rayon initial atteigne $r = 0$ et que le nuage ait complété son effondrement. Son expression vaut

$$t_{\text{ff}} = \left(\frac{3\pi}{32G\rho_0} \right)^{1/2} \propto \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}. \quad (1.20)$$

1.2.5 Conservation du moment angulaire et du flux magnétique

Considérons tout d'abord un nuage moléculaire auquel on imprègne une rotation solide à la vitesse de rotation ω_0 . Du fait de la présence unique de la force gravitationnelle donc le moment est nul, il advient que le moment angulaire total de notre système est conservé et vaut $\mathcal{M} = I\omega_0 = 2MR_0^2\omega_0/5$. Comme nous travaillons sur un système isolé, on aboutit à l'équation

$$\omega(t)R(t)^2 = \omega_0R_0^2. \quad (1.21)$$

La résolution de cette équation dans le cadre d'une particule à l'extrémité du disque et à l'équilibre, présentée en annexe, permet de conclure que

$$R_{\text{disk}} = \frac{\omega_0^2 R_0^4}{GM_{\text{disk}}} = 3\beta R_0. \quad (1.22)$$

Une application numérique donne, pour un rayon initial $R_0 \sim 3000$ AU et $\beta \sim 0.01$, un rayon final du disque de l'ordre de 100 AU. On comparera plus loin cette valeur aux résultats des simulations.

Considérons maintenant un système auquel on rajoute un champ magnétique initiale B_0 . Celui-ci est supposé uniforme et formant des lignes de champ parallèle. Une étude ultérieure évaluera les conséquences de désaligner ces lignes de champ et la direction de la rotation solide. L'équation de Maxwell-Thompson $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ implique que le flux du champ magnétique est conservé.

Lors de l'effondrement du nuage, la surface du premier cœur de Larson est bien plus petite que la surface efficace initiale de notre nuage. De fait, par conservation du flux, l'intensité du champ magnétique augmente de manière conséquente au sein du cœur. Il en résulte pour les particules chargées, une augmentation de la force de Lorentz, ce qui conduit à des éjections de matière le long des lignes poloidales du champ magnétique : les *outflows*.

1.2.6 Equations de la MHD idéale

Comme détaillé ci-haut, un champ magnétique règne au sein du MIS et donc au sein du cœur dense lors de son effondrement, d'une intensité de l'ordre de 10 μG . Il est alors nécessaire de tenir compte de son évolution au cours du temps, à travers les équations de Maxwell, pour modéliser un système plus réaliste. Pour cela, nous traiterons au cours de ce rapport les équations de la magnéto-hydrodynamique (MHD) idéale.

Dans le cadre de la MHD idéale, l'équation d'induction (Maxwell-Faraday) se re-écrit alors

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.23)$$

car l'on considère un milieu parfaitement collisionnel, et donc la loi d'Ohm idéale : $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$, et l'on néglige la contribution apportée par la force de Lorentz. Un calcul correctif à la MHD idéale où l'effet Hall et le terme d'Ohm sont pris en compte est réalisé en annexe. Cependant, étant donné que ces deux effets n'ont pas été utilisés dans mes travaux, ils ne sont que mentionnés ici.

2 Le code RAMSES : outil de simulations numériques

Il convient maintenant de présenter le code RAMSES, développé par Romain Teyssier en 2002 [1], que j'ai utilisé au cours de ce stage pour réaliser l'ensemble de mes simulations numériques sur les nœuds de calcul du centre Blaise Pascal (CBP) de l'ENS de Lyon.

2.1 Les bases du code et les critères de raffinement

Comme indiqué précédemment, le code RAMSES est un code eulérien sur grille à maillage adaptatif (AMR). Cela signifie que la région de l'espace étudiée est divisée en niveaux ℓ , chacun de ceux-ci comportant un certain nombre de cellules. Pour résoudre les équations de conservation (annexe A), dont on montre qu'elles se ramènent toutes à la forme

$$\partial_t \mathbf{U} + \nabla \cdot \mathbb{F}(\mathbf{U}) = 0, \quad (2.1)$$

le code calcule alors les flux à l'interface entre chaque cellule, ainsi que les grandeurs au sein de chacune d'entre elles. Si besoin, chaque cellule peut alors être raffinée indépendamment des autres en la subdivisant en $2^{n_{dim}}$ sous-cellules appartenant au niveau $\ell + 1$, développant de ce fait une structure en "arbre", où les calculs numériques ne sont établis qu'au sein des cellules "feuilles", cellules de plus haut niveau de raffinement (fig 2.1 (a)). Ainsi, le raffinement permet de se focaliser sur les régions de plus grand intérêt.

Il est donc nécessaire de donner une condition de raffinement spatial. Celui-ci est basé sur la longueur de Jeans locale, grandeur fondamentale pour déterminer précisément l'effondrement gravitationnel de la structure stellaire étudiée.

Nous introduisons alors le nombre de Jeans N_J , qui détermine le nombre de points nécessaires à simuler par longueur de Jeans. Truelove et al. montrèrent en 1997 [8], qu'il était nécessaire d'imposer $N_J \geq 4$ pour s'assurer que la fragmentation et l'effondrement étaient bien d'origine physique et non dus aux calculs numériques. La condition de raffinement local est donc que la taille de la cellule soit plus faible que la fraction de la longueur de Jeans par le nombre de Jeans. Cela amène à

$$\Delta x_i = \frac{L_{\text{box}}}{2^{\ell_i}} < \frac{\lambda_J}{N_J} \quad (2.2)$$

où L_{box} est la taille physique de la boîte initiale dans laquelle se déroule la simulation. Dans notre cas, elle équivaudra à quatre fois le rayon du cœur dense en effondrement.

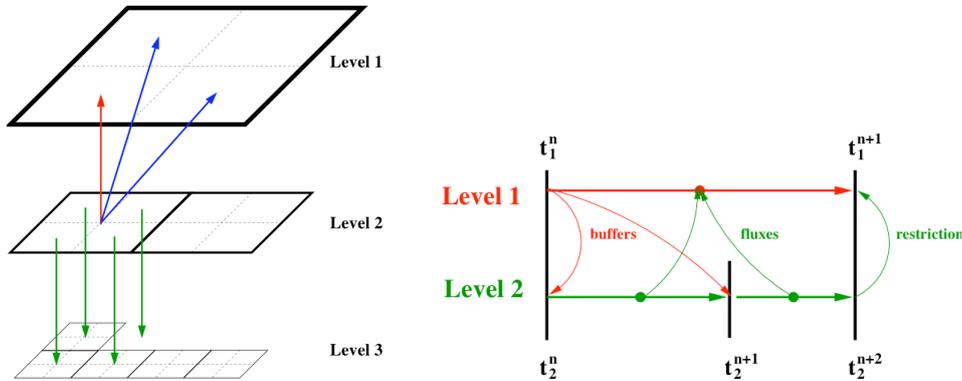


FIGURE 2.1 – (*Gauche*) : Structure de la grille AMR en 2D. Chaque cellule d'un niveau ℓ raffinée au niveau $\ell + 1$ communique avec les cellules adjacentes de cette cellule au niveau ℓ ainsi qu'avec les cellules issues de son raffinement au niveau $\ell + 1$. (*Droite*) : L'incrémentation temporelle au niveau $\ell + 1$ influe sur la cellule au niveau ℓ ainsi que sur ses flux relatifs à ses cellules adjacentes. Tiré du cours de Romain Teyssier à l'université de Zurich [9].

Afin de réaliser l'évolution temporelle du système, le code se doit également de déterminer un pas de temps pour lequel il va calculer la solution de la simulation. Il est à noter que le raffinement en temps, dont la condition sera précisée ci-bas, est indépendant pour chaque niveau de raffinement spatial. Comme illustré figure 2.1 (b), à chaque sous-niveau $\ell + 1$, il est établi deux pas de temps distincts respectant la relation

$$\Delta t^\ell = \Delta t_1^{\ell+1} + \Delta t_2^{\ell+1}. \quad (2.3)$$

Les calculs effectués au niveau $\ell + 1$ vont ainsi permettre de déterminer les flux aux interfaces ainsi que les quantités des cellules du niveau ℓ , remontant ainsi la grille de niveau en niveau.

Pour caractériser le pas de temps, il est nécessaire d'assurer la stabilité du schéma numérique de calcul. Le code RAMSES utilise un schéma de Godunov de second ordre pour discrétiser les équations de conservation [10]. La condition sur le pas de temps est établie par Courant et al. en 1928 [11], ceci afin de s'assurer que l'information ne puisse pas se propager de plus d'une cellule en un pas de temps. En notant v la vitesse du fluide dans la cellule et c_s la vitesse isotherme du son, cette condition s'écrit

$$\Delta t < C_{\text{CFL}} \frac{\Delta x}{c_s + v}, \quad (2.4)$$

où C_{CFL} est le facteur CFL, facteur devant nécessairement être strictement inférieur à 1. Au cours de mes simulations, ce facteur est resté fixe à 0.8.

2.2 Le contrôle des conditions initiales

Une fois les spécificités du code précisées, afin de démarrer une simulation, il est nécessaire de préciser les conditions initiales du système. Ceci se fait au sein d'un fichier, la *namelist* qui répertorie tant les paramètres initiaux physiques que numériques. On y renseigne ainsi les variables mentionnées au paragraphe 1.2.1 à savoir α , β et $1/\mu$ pour contrôler les rapport d'énergies initiales, ainsi que le paramètre δ , qui représente une perturbation azimutale en densité au sein du nuage. Ainsi, la densité initiale au sein du nuage s'écrit

$$\rho(x, y) = \rho_0 \left[1 + \delta \cos\left(2\pi \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \right], \quad (2.5)$$

où ρ_0 est la densité initiale qui s'exprime en fonction du paramètre α telle que

$$\rho_0 = \frac{3}{32\pi M_0^2} \left(\frac{5k_B T}{\alpha G \mu_{\text{mol}} m_{\text{H}}} \right)^3. \quad (2.6)$$

En outre, il convient également de décrire les paramètres numériques nécessaires à la *namelist*. Je vais décrire ici les principaux qu'ils m'aient été amenés à modifier. Tout d'abord, pour le paramétrage de la grille, deux paramètres à fixer sont les niveaux de raffinement minimum ℓ_{min} et maximum ℓ_{max} de la grille. Le code RAMSES introduit également le paramètre n_{expand} , qui correspond au niveau d'expansion de la grille lors du raffinement. Il définit à quelle distance maximale on souhaite raffiner les cellules adjacentes lorsque le critère spatial est atteint pour une cellule. Une augmentation de ce paramètre permet de "lisser" les calculs de flux entre les cellules et réduire les erreurs numériques. Enfin, il est nécessaire d'indiquer au code le nombre de Jeans requis par cellule afin de s'assurer du critère de raffinement spatial.

Un autre paramètre majeur nécessaire à la simulation réside dans le choix du solveur de Riemann pour résoudre le problème de Riemann lié aux équations de conservation et au calcul des flux entre les cellules. En effet, comme indiqué dans le cours de Romain Teyssier, le solveur utilisé impacte à la fois la puissance de calcul nécessaire mais également la précision des résultats fournis. Il existe différents types de solveur, utilisant différentes méthodes, comme le solveur *llf* (local Laxe-Friedrich), le solveur *hll* (Harten-Laxe-van Leer) ou encore sa variante *hlld* plus adaptée aux cas avec présence d'un champ magnétique.

Au cours des simulations présentées dans la section consacrée aux résultats, les paramètres numériques essentiels que j'ai fait varier étaient ainsi ℓ_{min} , n_{expand} , N_J ainsi que le solveur de Riemann parmi ceux mentionnés ci-haut.

Enfin, le dernier paramètre numérique sur lequel j'ai consacré la majeure partie des simulations de mon stage fut la mise en place de trois angles associés à trois matrices de rotation afin de faire pivoter au sein de la grille l'axe de rotation ainsi que l'axe du champ magnétique initial. On décrira dans la suite par ϕ_1 et ϕ_2 les deux angles associés à la rotation de l'axe de rotation, respectivement autour de l'axe y et de l'axe z du repère initial, conformément à la représentation d'un vecteur en coordonnées

sphériques. Enfin, le dernier angle, noté θ , contrôle l'écart entre l'axe de rotation et l'axe du champ magnétique en effectuant la rotation dans le sens trigonométrique autour de l'axe x de la nouvelle base définie par les deux précédents angles. Ces trois angles ont par défaut la valeur zéro.

3 Simulations numériques et résultats

L'essentiel de mon stage a donc porté sur la caractérisation et la quantification d'un effet de désalignement de l'axe de rotation ainsi que de l'axe du champ magnétique avec l'axe z de la grille. Nous souhaitons ainsi évaluer si les erreurs liées à la diffusion numérique pouvaient contraindre le système à s'aligner avec un axe propre de la grille au détriment d'une résolution numérique fidèle.

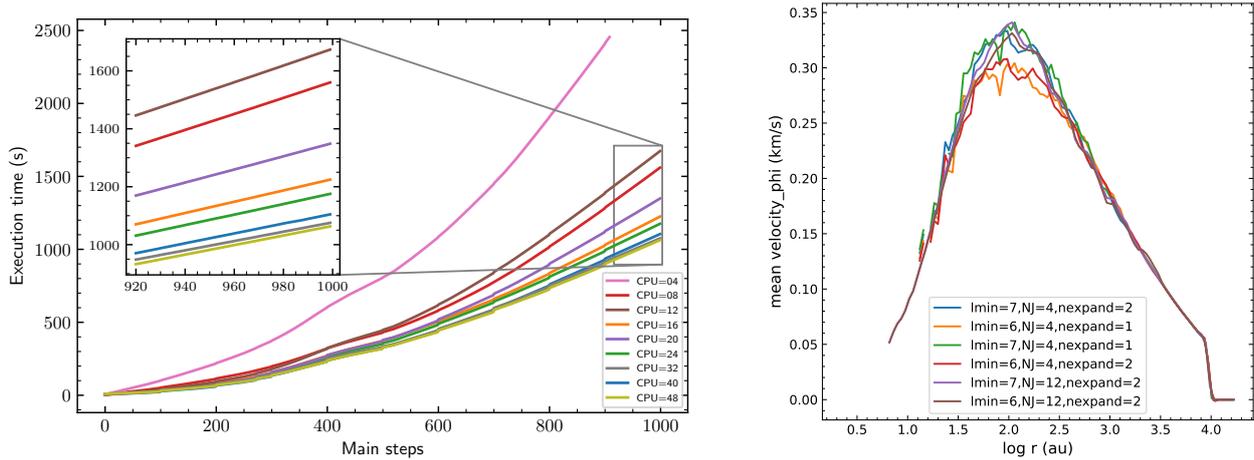


FIGURE 3.1 – (*Gauche*) : Comparaison du temps d'exécution nécessaire à l'effondrement d'un nuage moléculaire pour les paramètres de référence physiques et numériques, et sans champ magnétique. Les différentes courbes représentent les différents nombres de processeurs utilisés. Les simulations ont été réalisées sans rotation et pour un coefficient $\alpha = 0.5$. (*Droite*) : Comparaison des vitesses orthoradiales observées au temps t_0 en faisant varier les paramètres numériques. Le solveur de Riemann utilisé ici est le solveur *hll*.

Nous avons pour cela traité successivement plusieurs cas. Il a d'abord été nécessaire de définir physiquement et numériquement les paramètres du cas de référence, dans un souci de compromis entre robustesse physique du système, précision numérique et rapidité d'exécution des calculs. Une fois ce cas de référence établi, nous avons étudié le désalignement des dits axes pour un cas en l'absence de champ magnétique et un cas en MHD idéale.

Pour réaliser les simulations numériques, le code RAMSES utilise le protocole MPI afin de distribuer les calculs sur plusieurs processeurs en parallèle. Il a donc été nécessaire de déterminer le nombre optimal de cœurs à utiliser, suffisamment faible pour pouvoir lancer en parallèle un grand nombre de simulations tout en réduisant sensiblement la durée de calcul.

On observe sur la figure 3.1 (a), contrairement à ce que l'on souhaiterait, que doubler le nombre de processeurs ne divise pas par deux le temps d'exécution. A contrario, le temps d'exécution est parfois plus élevé lorsque l'on augmente le nombre de processeurs, signe d'une mauvaise répartition des tâches au sein de ceux-ci. En réalité, les zones de la grille ne sont pas affectées nécessairement à des processeurs mitoyens, ce qui peut rajouter du temps de communication entre eux [9]. On l'observe notamment au cours de la répartition initiale, à l'étape zéro. Finalement, il apparaît que le meilleur ratio temps de calcul / nombre de processeurs est à l'avantage des 32 processeurs, valeur que j'ai dès lors utilisée pour toutes mes simulations.

3.1 Définition du cas de référence

Avant de faire varier les paramètres physiques et numériques indépendamment pour décider lesquels étaient les plus optimaux à choisir, il s'agissait en premier lieu de définir un temps de référence pour

pouvoir comparer les modèles entre eux. Pour cela, nous avons choisi l’instant de formation du cœur dense, qui a lieu lorsque la densité centrale atteint $\rho = 10^{-13} \text{ g cm}^{-3}$. Nous posons donc t_0 , le temps à partir duquel cette condition est réalisée, estimant qu’à cet instant le nuage est effondré. En effet, si l’on s’en réfère au temps de chute libre, pour une densité $\rho = 10^{-13} \text{ g cm}^{-3}$, celui-ci vaut $t_{\text{ff}} = 0.2 \text{ kyr}$, un temps négligeable devant la durée initiale $\sim 63.8 \text{ kyr}$, obtenue pour $\rho_0 = 1.089 \cdot 10^{-18} \text{ g cm}^{-3}$. Par une modification des fichiers du code RAMSES, nous lui avons spécifié de nous donner un *output* (liste de données établies sur la simulation à un temps donné) à cet instant-ci pour y faire des mesures comparatives.

Pour réaliser des mesures sur les disques pré-stellaires et les premiers cœurs de Larson, il a ensuite été nécessaire de pouvoir les caractériser numériquement. Pour identifier les cellules numériques appartenant au disque, nous nous sommes appuyés sur les critères établis par Joos [12].

Ensuite, pour le premier cœur de Larson, nous avons établi les critères suivants pour isoler les cellules y appartenant :

1. Un critère de densité nécessaire à la formation du cœur dense : $\rho > 10^{-13} \text{ g cm}^{-3}$.
2. Une pression thermique qui surpasse le support rotatif : $f_{\text{threshold}} P_{\text{th}} > \rho v_{\phi}^2 / 2$, où l’on pose $f_{\text{threshold}} = 2$. Ainsi, nous caractérisons le premier cœur, adiabatique, par opposition au disque.

3.1.1 Variation des paramètres physiques

Premièrement, il nous faut discuter des paramètres physiques que nous allons utiliser par la suite pour le reste des simulations. Pour cela nous avons réalisé une carte de densité, représentée figure 3.2, des disques formés 6 kyr après t_0 pour différents cas.

Nous souhaitons avoir des disques suffisamment stable ie. sans fragmentation trop rapide, tout en ayant suffisamment de taux de rotation lorsque nous introduirons un champ magnétique, qui a pour effet d’entraîner un freinage magnétique et de réduire, voire bloquer, cette formation de disque [13].

On constate ainsi que sur la première ligne, le support thermique n’est pas assez élevé pour former des disques stables, la fragmentation intervient tôt, même pour des valeurs faibles de $\beta \leq 0.01$. Lorsque l’on augmente α , on constate qualitativement que la fragmentation se développe plus lentement pour toutes les valeurs de β et que pour les valeurs les plus faibles, le disque reste stable jusqu’à 6 kyr après t_0 . Cependant, pour les valeurs plus élevées qui nous intéressent, le disque n’est toujours pas suffisamment stable.

Une solution a donc été, comme présentée sur la dernière ligne, d’introduire une perturbation azimutale en densité de l’ordre de 10%, pour favoriser la formation de deux bras spiraux (mode 2). Par ce biais, nous forçons et donc contrôlons les instabilités numériques de calcul, ce qui permet d’assurer la stabilité à long terme du disque, ainsi qu’une apparence similaire de l’évolution des disques entre les différents β , avec un développement plus rapide du disque si β augmente. On remarque également que l’ordre de grandeur du disque formé correspond à celui établi théoriquement à l’équation 1.22.

Pour la suite, pour les paramètres physiques, nous choisirons donc : $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.03$ et $\delta = 0.1$.

3.1.2 Variation des paramètres numériques

Deuxièmement, il a été nécessaire de faire varier les paramètres numériques présentés au paragraphe 2.2. Au cours du stage, pour les simulations présentées ci-dessous, j’ai fait varier ℓ_{min} entre les valeurs 5, 6 et 7, n_{expand} entre les valeurs 1, 2 et 4 et N_{J} entre les valeurs 4, 8, 12 et 16. Cependant, pour des questions de concision et de lisibilité des données, je ne présenterai qu’une version allégée des résultats obtenus.

Tout d’abord, nous avons souhaité quantifier deux données nécessaires à la détermination des paramètres numériques : le temps d’exécution, qui devait rester suffisamment limité pour avoir le temps de traiter nombre de simulations, mais également l’erreur numérique à la théorie du temps de chute libre selon la précision allouée. On remarque, au vu des résultats de la table 3.1, que le temps d’exécution et l’erreur commise sont presque exactement inversement liés l’un à l’autre. Ainsi, l’erreur la plus faible

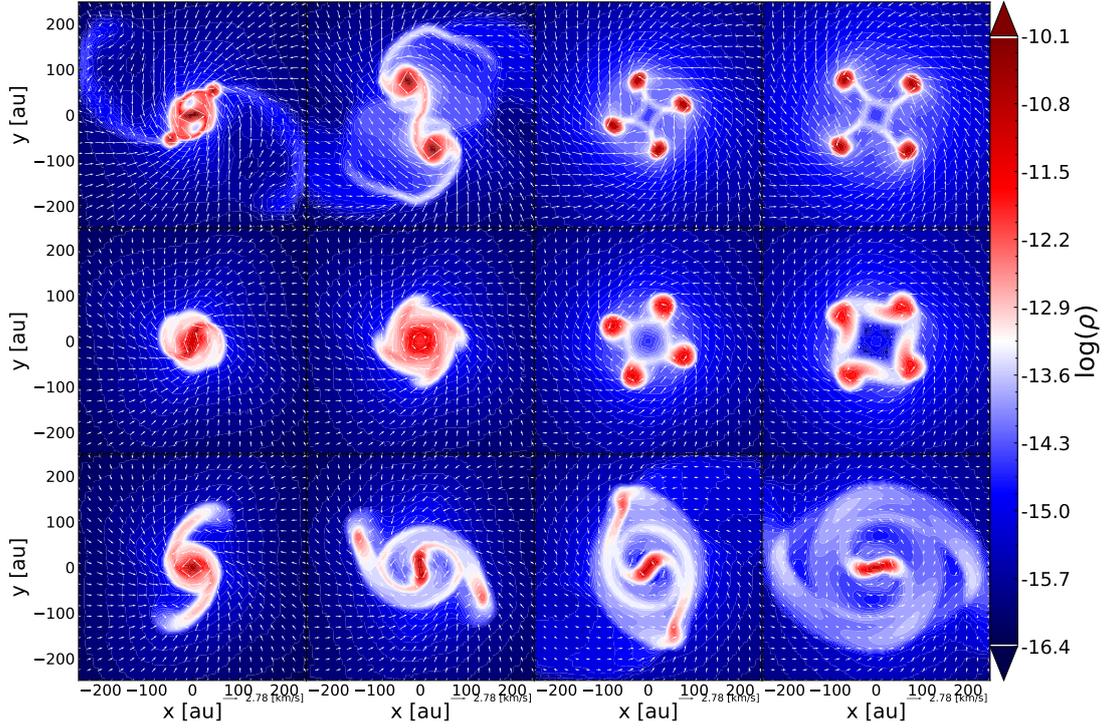


FIGURE 3.2 – Carte de densité établie à $t_0 + 6$ kyr. Sur une même ligne, le paramètre α est constant, sur une même colonne, le paramètre β est constant. De gauche à droite, β prend les valeurs 0.005, 0.01, 0.02, 0.03. De haut en bas, α prend les valeurs 0.35 et 0.5. Sur la dernière ligne, on conserve $\alpha = 0.5$ et on introduit $\delta = 0.1$.

ℓ_{\min}	N_J	n_{exp}	Time (s)	ℓ_{\min}	N_J	n_{exp}	t_0 (kyr)	t_{ff} (kyr)	error (%)
5	4	1	10.0	7	12	4	65.27	63.8	2.31
5	4	2	15.5	7	12	2	65.33	63.8	2.39
5	4	4	25.7	7	12	1	65.37	63.8	2.45
6	4	1	33.0	7	4	2	66.52	63.8	4.25
6	4	2	37.2	7	4	4	66.53	63.8	4.28
5	12	1	41.0	7	4	1	66.66	63.8	4.47
6	4	4	48.7	6	12	4	66.96	63.8	4.94
5	12	2	79.8	6	12	2	67.07	63.8	5.12
6	12	1	96.4	6	12	1	67.21	63.8	5.34
6	12	2	101.4	6	4	2	69.97	63.8	9.67
6	12	4	162.0	6	4	4	69.98	63.8	9.68
7	4	4	273.0	5	12	2	70.08	63.8	9.85
7	4	1	299.9	6	4	1	70.26	63.8	10.12
7	4	2	316.1	5	12	1	70.56	63.8	10.59
7	12	1	458.0	5	4	2	78.54	63.8	23.10
7	12	2	479.6	5	4	4	78.56	63.8	23.13
7	12	4	558.2	5	4	1	79.38	63.8	24.42

TABLE 3.1 – *Gauche* : Tableau des temps d’exécution nécessaires pour obtenir l’output t_0 durant les simulations, en faisant varier les paramètres numériques initiaux. Trié par temps d’exécution croissant. Solveur *hll*. *Droite* : Estimation de l’erreur numérique entre le temps de chute libre et l’output t_0 . Trié par erreur croissante. Simulations réalisées pour $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0$. Solveur *llf*.

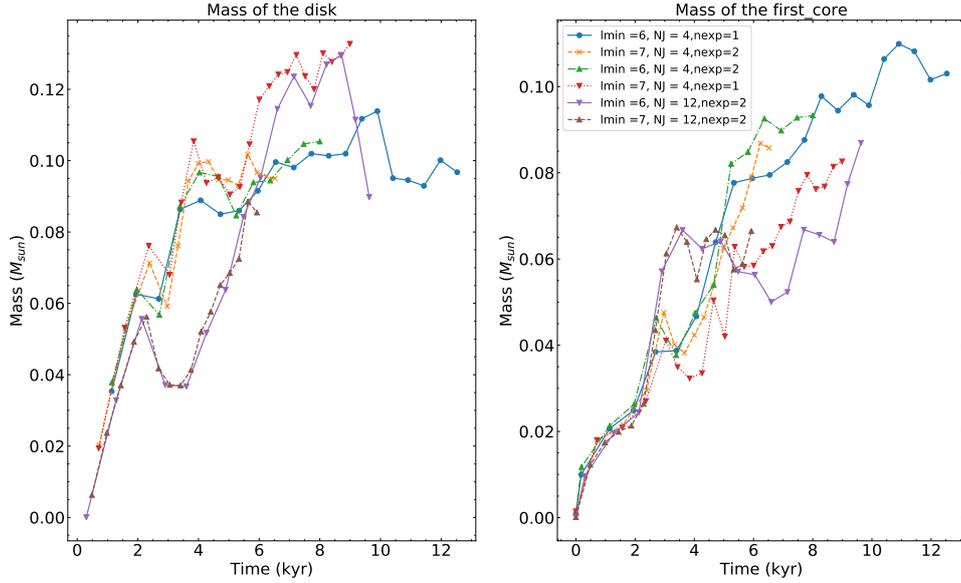


FIGURE 3.3 – Masse accrétée au cours du temps pour différents paramètres numériques par le disque (*gauche*) et par le premier cœur de Larson (*droite*). Le solveur de Riemann utilisé est le solveur *hll*.

résulte du temps de calcul le plus élevé mais aussi des paramètres numériques les plus précis. Cependant, le temps d’exécution n’étant pas linéaire selon le temps (figure 3.1 (a)), il était inconcevable de choisir des paramètres conduisant à 560s d’attente pour l’output t_0 . On observe d’ailleurs une forte dépendance du temps d’exécution avec ℓ_{\min} , à autres paramètres fixés. À l’inverse, la dépendance selon N_J occasionne une multiplication par deux ou trois du temps d’exécution, indépendamment des autres paramètres, quand n_{expand} ne fait varier qu’à la marge celui-ci.

Ces trois paramètres influent également de manière très similaire sur l’erreur commise sur la table de droite, avec une dépendance importante de ℓ_{\min} , une division de l’erreur commise par deux lors de la variation de N_J et enfin, une variation toujours à la marge lors de la modification de n_{expand} .

Ensuite, différentes conclusions peuvent être tirées de la figure 3.1 (b). En premier lieu, au pic de vitesse, la vitesse la plus élevée est obtenue pour la précision maximale et la plus faible pour la précision minimale, un résultat attendu. Deuxièmement, on constate qu’une variation de ℓ_{\min} et de N_J conserve la forme de la courbe mais la décale alors qu’une augmentation de n_{expand} tend à affiner la courbe. De cela, on déduit la nécessité de maximiser ce dernier paramètre.

Enfin, la figure 3.3 apporte des éléments complémentaires au choix des paramètres numériques. On y constate différentes tendances de courbes, selon les paramètres retenus. Premièrement, il apparaît que ℓ_{\min} n’affecte que peu les variations des courbes comme on peut le voir sur les duos marron-violet et bleu-vert. À l’inverse le facteur primordial apparaît ici être N_J . En effet, c’est lui qui détermine la forme globale de la courbe, comme constaté notamment sur l’écart entre les courbes verte et violette, ou les courbes orange et marron dont les allures sont similaires. Il en va de même pour les couples de courbes verte et bleue, ou orange et rouge, démontrant que paramètre n_{expand} semble encore une fois n’opérer que des changements à la marge.

Par conséquent, nous pouvons déduire de ces différentes analyses les paramètres numériques optimaux. Il convient de choisir ceux-ci afin d’obtenir les résultats les plus précis souhaités tout en obtenant un temps d’exécution des simulations raisonnable. Si l’on se réfère au cas le plus précis associé au triplet (7, 12, 4), les figure 3.3 et 3.1 (b) montrent la nécessité de choisir $N_J = 12$. De plus, il est préférable de choisir $\ell_{\min} = 6$ plutôt que 7, étant donné la similarité des courbes et le gain de temps obtenu (~ 100 s contre ~ 500 s). Enfin, la figure 3.1 (b) nous induit à choisir n_{expand} aussi élevé que possible. Nous le choisissons égal à 2, au vu des résultats de la table 3.1, car le gain en erreur commise ne compense pas

le temps perdu dans le cas égal à 4. Les paramètres retenus sont donc le triplet (6, 12, 2).

3.2 Etude paramétrique pour le cas hydrodynamique

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre des paramètres physiques et numériques de référence établis ci-haut, et nous allons quantifier l'impact sur le moment angulaire au sein du système des effets de désalignement de l'axe de rotation avec l'axe originel de la grille ainsi que du solveur de Riemann. Pour cela, nous avons calculé le moment angulaire du disque et du premier cœur de Larson à l'aide des critères de sélection, puis calculé et normalisé le produit scalaire de ceux-ci avec la direction initiale pour obtenir la déviation angulaire.

3.2.1 Désalignement de l'axe de rotation

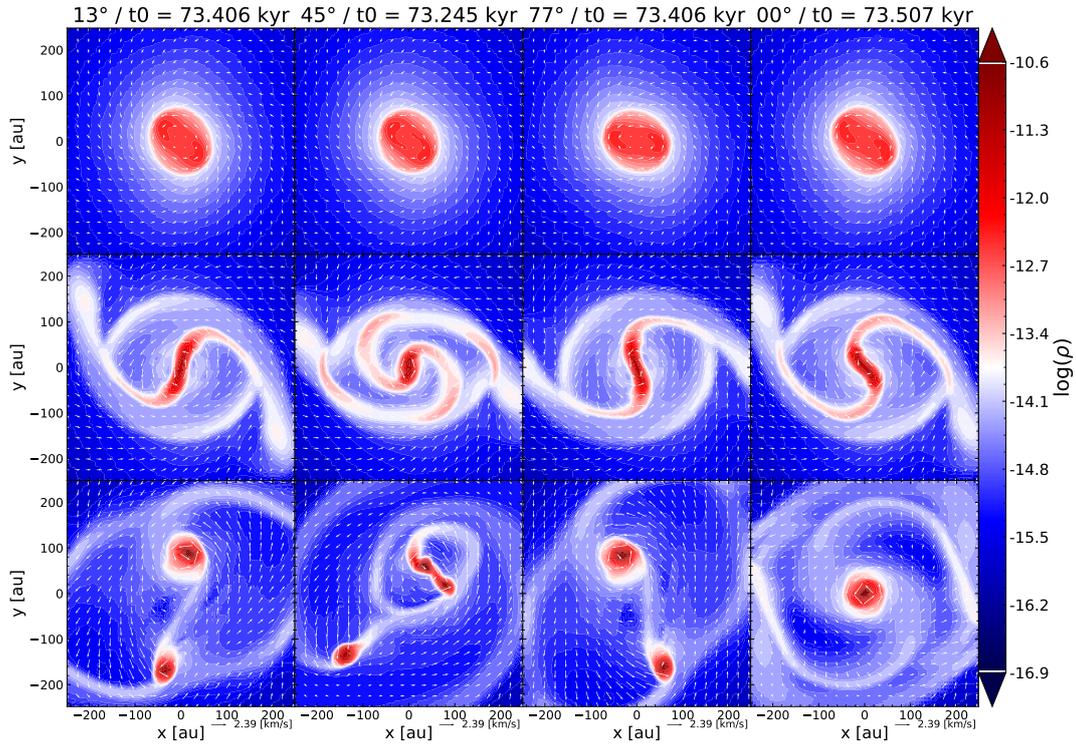


FIGURE 3.4 – Carte de densités et de champs de vitesse tracés pour différents angles et différents temps. Sur une même colonne, la valeur de ϕ_1 est constante et indiqué en en-tête, ainsi que le temps t_0 . De haut en bas, les outputs sont réalisés respectivement 2 kyr, 5 kyr et 10 kyr après t_0 . Solveur de Riemann *hll*.

Les simulations présentées dans ce paragraphe ont été obtenues en modifiant l'inclinaison de l'axe de rotation initiale. En l'absence de champ magnétique, par conservation du moment angulaire, celui-ci devrait conserver une direction constante, et c'est précisément cet écart angulaire que nous allons chercher à mesurer. Pour cela nous avons tout d'abord fait varier ϕ_1 entre 0° , 13° , 45° et enfin 77° . Puis, dans un second temps, nous avons fixé $\phi_1 = 45^\circ$ et avons fait varier ϕ_2 des mêmes valeurs que ϕ_1 précédemment.

Tout d'abord, pour observer le phénomène, nous avons réalisé une carte de densité comparative entre les différentes valeurs de ϕ_1 , à différents instants après t_0 . Ces résultats sont présentés figure 3.4. On y constate tout d'abord que, malgré une légère variation, les temps t_0 sont sensiblement identiques. De plus, jusqu'à 5 kyr, on constate une apparence similaire, signe de la robustesse du phénomène, qui diverge rapidement par la suite.

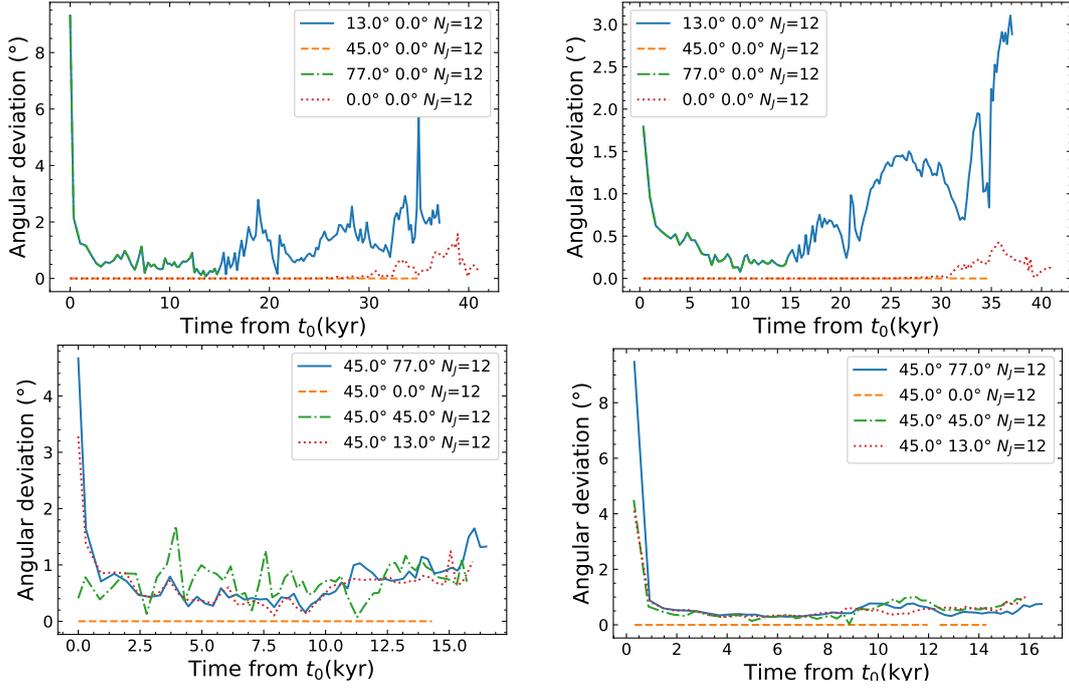


FIGURE 3.5 – Déviation angulaire entre la direction du moment angulaire initial et du moment angulaire à l’instant t pour différents angles. *Colonne gauche* : moment angulaire du premier cœur. *Colonne droite* : moment angulaire du disque. *Première ligne* : $\phi_2 = 0^\circ$. *Deuxième ligne* : $\phi_1 = 45^\circ$. Solveur de Riemann *hll*.

Ces éléments sont a fortiori confirmés par la figure 3.5, qui présente les déviations angulaires entre le moment angulaire initial et à différents instants. On y observe une superposition des courbes pour $\phi_1 = 13^\circ$ et 77° et une quasi-superposition pour $\phi_2 = 13^\circ$ et 77° . Malgré des erreurs initiales que l’on peut approprier à la sélection des cellules, on constate que les erreurs commises restent de l’ordre de 1 durant les 15 premiers kyr, avant de s’accroître tout en semblant atteindre un palier. On remarque de plus une sensibilité aux erreurs numériques similaires pour les trois courbes dans le cas où $\phi_1 = 45^\circ$, signe que le moment angulaire ne semble pas s’aligner sur un axe privilégié de la grille mais dévier uniquement par rapport à la direction attendue.

3.2.2 Influence du solveur de Riemann et de la résolution numérique

Lors de l’analyse de ces résultats, nous nous sommes alors demandés si l’erreur commise n’était pas due à une sous-estimation du nombre de Jeans. Du fait du pivotement du disque, celui-ci se retrouve à occuper non plus une tranche de la cellule mais dans le pire des cas sa diagonale, donc la longueur est $\sqrt{3}$ fois plus grande que son côté. Nous avons donc cherché à savoir si une correction à ce nombre de Jeans pouvait permettre de réduire l’erreur commise entre les courbes. Nous avons également voulu déterminer l’influence du solveur, jusqu’ici négligé, sur l’erreur commise. En effet, si les résultats jusqu’alors présentés sont réalisés en utilisant le solveur *hll*, les premières simulations utilisaient quant à elle le solveur *llf* et nous allons ici comparer leurs effets.

Les résultats de la figure 3.6 permettent de tirer plusieurs conclusions. Premièrement, si une erreur est bien commise au cours du temps pour les trois valeurs de ϕ_1 , on déduit de la figure (c) que, comme précédemment, $\phi_1 = 45^\circ$ semble être une direction propice à une diminution radicale des erreurs commises. Cependant, cet aspect est intrigant car, du fait des faibles erreurs obtenues, cela semble être du bruit numérique. Il est donc nécessaire d’établir une étude plus approfondie. Deuxièmement, comme attendu et vu sur la figure (b), une augmentation de N_J de 12 à 17 réduit la déviation angulaire. De plus, le solveur *hll* apparaît plus précis également que le solveur *llf* avec une division moyenne de la déviation angulaire par deux, à même N_J . Enfin, de la figure (a), on déduit également une plus grande robustesse aux erreurs du solveur *hll* pour lequel une erreur sensible apparaît après 25 kyr contre

respectivement 15 kyr et 20 kyr pour le solveur *llf*. Cela confirme la plus grande précision numérique apportée par l'augmentation de N_j ainsi que, et surtout, par l'utilisation du solveur *hll*.

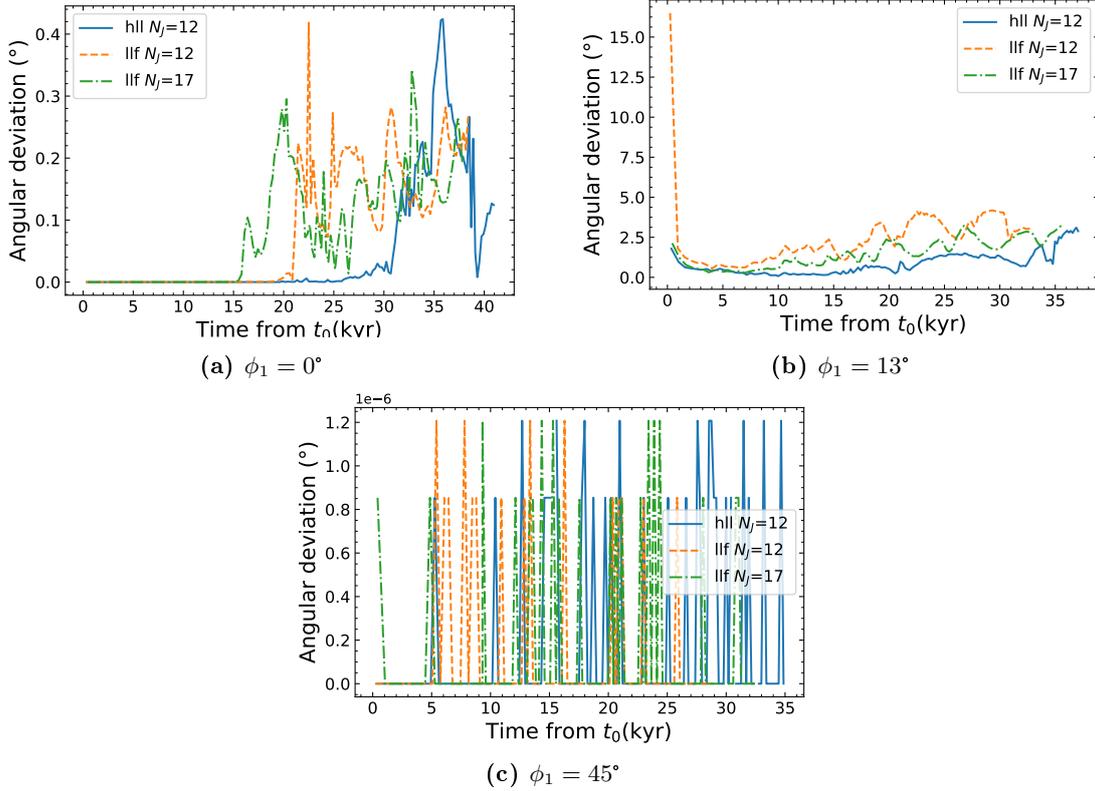


FIGURE 3.6 – Comparaison des déviations angulaires entre le moment angulaire du disque et le moment angulaire initial pour différents solveurs et résolutions numériques. $\phi_2 = 0^\circ$.

3.3 Étude paramétrique en MHD idéale

On se place maintenant dans le cas où l'on introduit un champ magnétique. Connaissant le paramètre μ il est possible de remonter au champ magnétique initial implanté dans la simulation.

$$\frac{B_0}{\sqrt{4\pi}} = \frac{\rho R_0}{\zeta} \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{4\pi G}{5}}. \quad (3.1)$$

Il sera en réalisé plus aisé d'implémenter dans la simulation le paramètre *crit*, correspondant à $1/\mu$, pour paramétrer le champ magnétique initial. De plus, du fait de la définition des constantes de perméabilité dans le système CGS ($\mu_0 = 1$) il est en réalité implémenté $B_0/\sqrt{4\pi}$ dans le code RAMSES.

On choisit dans notre cas $\mu = 5$ ie. *crit* = 0.2 pour obtenir un champ d'intensité moyenne B_0 0.1 G. On traite tout d'abord le cas où ce champ initial et l'axe de rotation est aligné puis on désaxera les deux d'un angle $\theta = 45^\circ$. On réalise alors une analyse similaire au cas sans champ magnétique.

3.3.1 Alignement du champ magnétique et de l'axe de rotation

Dans le cas où le champ magnétique et l'axe de rotation sont alignés à l'instant initial, on comparera à chaque fois les cas $(\phi_1 = 0^\circ, \phi_2 = 0^\circ)$, $(\phi_1 = 45^\circ, \phi_2 = 0^\circ)$ et $(\phi_1 = 45^\circ, \phi_2 = 45^\circ)$. On réalise tout d'abord une carte de densité pour comparer qualitativement les outflows et disques formés pour ces trois cas. Les résultats sont présentés figure 3.7.

Même si l'on constate une légère déviation de la direction générale de l'outflow ainsi que de la direction du disque formé dans le cas $(\phi_1 = 45^\circ, \phi_2 = 45^\circ)$, on observe tout de même des résultats similaires pour la rapidité de formation des outflows, la taille des disques et la densité centrale du

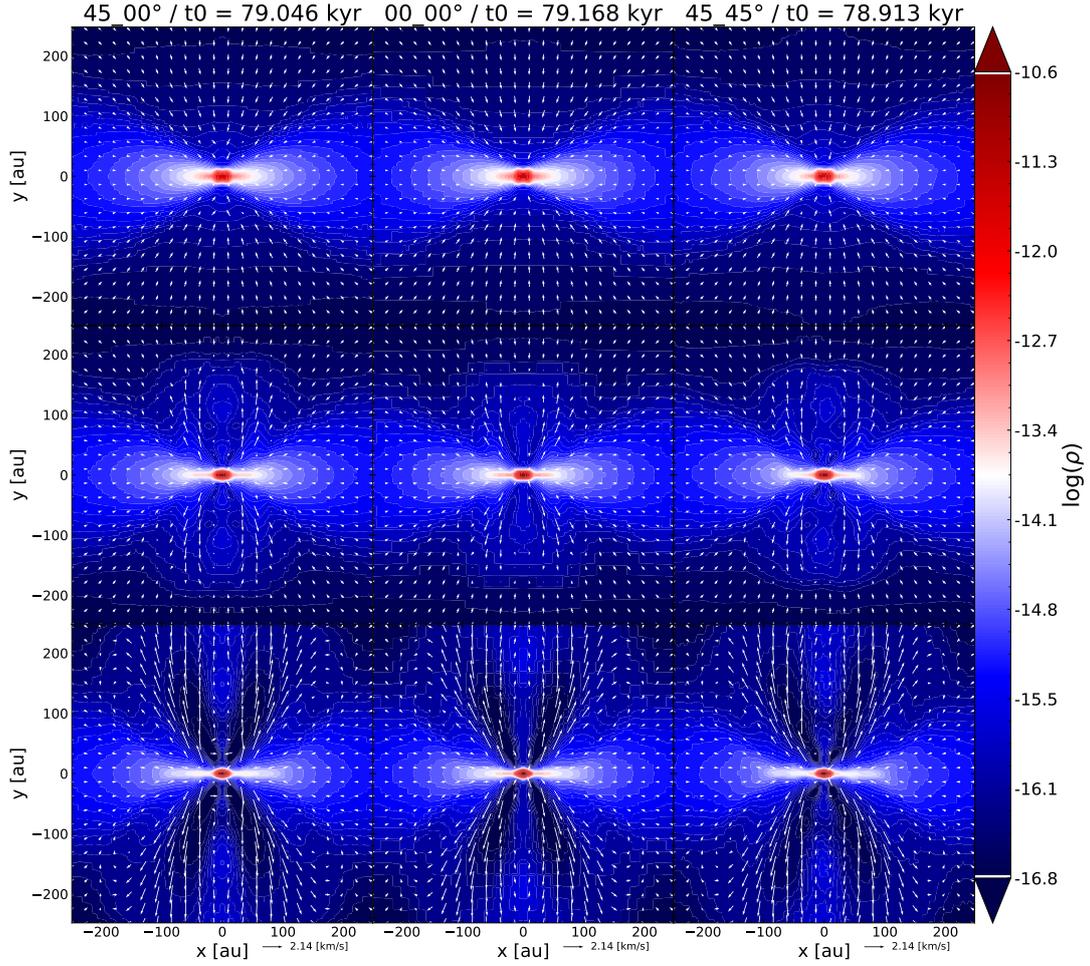


FIGURE 3.7 – Carte de densité et de vitesse pour les trois cas mentionnés en en-tête de chaque colonne. De haut en bas, les figures sont obtenues 0.5, 1 et 1.5 kyr après t_0 . Simulations réalisées avec le solveur *hlld*.

premier cœur de Larson formé en leurs centres. On comparera ce léger décalage avec les résultats quantitatifs observés sur la figure 3.8.

Sur celle-ci, nous avons également rajouté deux courbes pour les cas $(\phi_1 = 45^\circ, \phi_2 = 0^\circ)$ et $(\phi_1 = 45^\circ, \phi_2 = 45^\circ)$ en tenant compte de la mention faite au paragraphe précédent sur le nombre de Jeans, respectivement multiplié par $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. Il convient tout d’abord, pour les figures concernant la direction de l’outflow, de ne pas tenir compte des premiers instants où sa direction n’est pas développée (après 1 kyr en accord d’après 3.7).

On y constate alors deux phénomènes. Le premier est que le cas $(\phi_1 = 45^\circ, \phi_2 = 0^\circ)$, sans que la déviation soit strictement nulle, possède une faible déviation, comme le cas aligné sur la grille. Cet aspect semble corroborer les résultats obtenus ci-dessus, et donc être indépendant de la présence d’un champ magnétique. Le second est donc que dans le deuxième cas, une déviation est observée même si celle-ci semble atteindre un forme de convergence. Ainsi, pour l’outflow, on retrouve la légère déviation, 5° , observé en figure 3.7. De plus, contrairement au paragraphe précédent, on constate que l’amélioration apportée par $N_J = 12$ n’est significative qu’à court terme pour le moment angulaire (erreur divisée par deux) et n’apporte que peu de précision supplémentaire pour la direction de l’outflow.

3.3.2 Désalignement

Comme indiqué ci-haut, on désaligne maintenant le moment angulaire initial et la direction du champ magnétique initial. On réalise alors une étude des paramètres similaires, en rajoutant de plus la

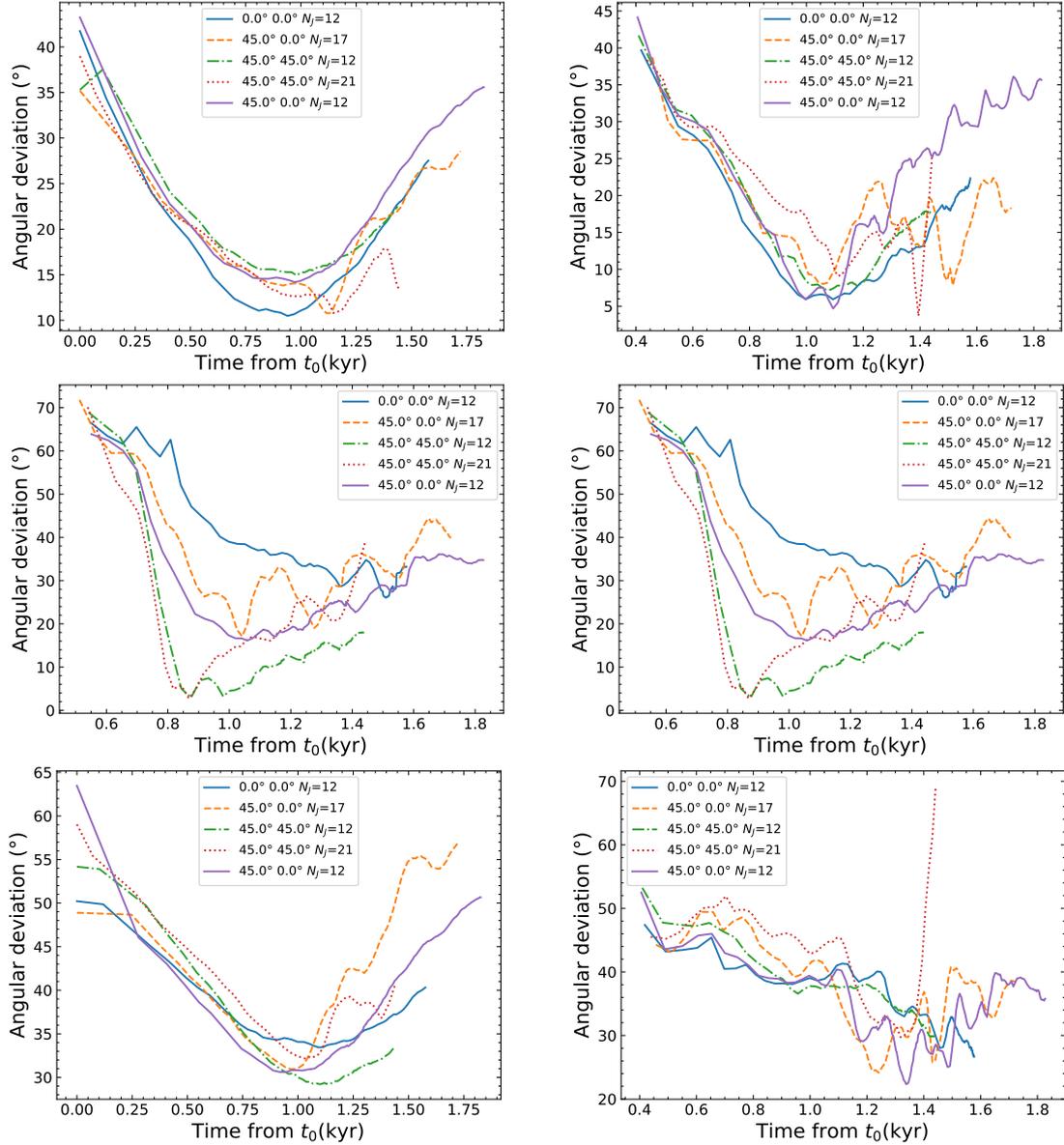


FIGURE 3.9 – Comparaison des déviations angulaires observées. Sur la première ligne, entre le moment angulaire initial et le moment angulaire du cœur (*gauche*) et celui du disque (*droite*). Sur la deuxième ligne entre la direction majoritaire de l’outflow et et le moment angulaire du cœur (*gauche*) et celui du disque (*droite*). Enfin, sur la dernière ligne, entre le champ magnétique initial et le moment angulaire du cœur (*gauche*) et celui du disque (*droite*).

sur un axe préférentiel de la grille au détriment des phénomènes physiques étudiés.

Les conclusions tirées des différents cas observés conduisent à affirmer que, si des erreurs numériques sont nécessairement commises lors des calculs des moments angulaires et des directions des outflows, nous observons des déviations qui ne dépassent pas le seuil de 5° , en introduisant des angles d’au moins 13° pour le moment angulaire et de 45° pour les outflows. Cela implique que le système ne tend pas à se désaxer entièrement vers un des axes x, y, z de la grille, comme nous souhaitions le démontrer.

Cependant, il pourrait être intéressant de prolonger l’étude pour déterminer la nature de la si petite erreur du cas $(\phi_1 = 45^\circ, \phi_2 = 0^\circ)$ contrairement au cas $(\phi_1 = 45^\circ, \phi_2 = 45^\circ)$, en déviant ϕ_2 pour d’autres valeurs de ϕ_1 et constater si l’on observe d’autres correspondances particulières et lever le questionnement du bruit numérique. Néanmoins, d’un point de vue numérique, les conclusions attendues sur la précision supplémentaire apportée par une augmentation de ℓ_{\min} et de N_J sont corroborés par les simulations dans le cas hydrodynamique mais plus mitigées pour le cas en MHD idéale.

Références

- [1] R. Teyssier. Cosmological hydrodynamics with adaptive mesh refinement - A new high resolution code called RAMSES. *Astronomy & Astrophysics*, 385(1) :337–364, April 2002. Number : 1
Publisher : EDP Sciences.
- [2] Charles L. H. Hull and Qizhou Zhang. Interferometric observations of magnetic fields in forming stars. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 6 :3, March 2019.
- [3] Terrence S. Tricco, Daniel J. Price, and Guillaume Laibe. Is the dust-to-gas ratio constant in molecular clouds? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society : Letters*, 471(1) :L52–L56, October 2017. arXiv : 1706.05107.
- [4] R. B. Larson. Numerical Calculations of the Dynamics of a Collapsing Proto-Star*. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 145(3) :271–295, August 1969.
- [5] Philippe André, Shantanu Basu, and Shu-ichiro Inutsuka. The Formation and Evolution of Pre-stellar Cores. *arXiv :0801.4210 [astro-ph]*, January 2008. arXiv : 0801.4210.
- [6] T. Ch. Mouschovias and L. Spitzer, Jr. Note on the collapse of magnetic interstellar clouds. *The Astrophysical Journal*, 210 :326, December 1976.
- [7] James Hopwood Jeans and George Howard Darwin. I. The stability of a spherical nebula. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 199(312-320) :1–53, January 1902. Publisher : Royal Society.
- [8] J. Kelly Truelove, Richard I. Klein, Christopher F. McKee, John H. Holliman II, Louis H. Howell, and Jeffrey A. Greenough. The Jeans Condition : A New Constraint on Spatial Resolution in Simulations of Isothermal Self-Gravitational Hydrodynamics. *The Astrophysical Journal*, 489(2) :L179, October 1997. Publisher : IOP Publishing.
- [9] Romain Teyssier and Oscar Agertz. Computational Astrophysics 5 Higher-order and AMR schemes, 2009. Available online at https://www.ics.uzh.ch/~teyssier/comp_astro_lectures/compastro_lecture5.pdf.
- [10] Romain Teyssier. RAMSES User’s Guide. Available online at https://www.ics.uzh.ch/~teyssier/ramses/Documentation_files/ramses_ug.pdf.
- [11] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100 :32–74, January 1928.
- [12] Marc Joos, Patrick Hennebelle, and Andrea Ciardi. Protostellar disk formation and transport of angular momentum during magnetized core collapse. *Astronomy & Astrophysics*, 543 :A128, July 2012. arXiv : 1203.1193.
- [13] P. Hennebelle and R. Teyssier. Magnetic processes in a collapsing dense core. II. Fragmentation. Is there a fragmentation crisis? *Astronomy and Astrophysics, Volume 477, Issue 1, January I 2008, pp.25-34*, 477(1) :25, January 2008.
- [14] Benoît Commerçon. *Formation d’étoile : étude de l’effondrement des coeurs prestellaires*. These de doctorat, Lyon, École normale supérieure (sciences), January 2009.
- [15] J. Masson, G. Chabrier, P. Hennebelle, N. Vaytet, and B. Commerçon. Ambipolar diffusion in low-mass star formation. I. General comparison with the ideal magnetohydrodynamic case. *Astronomy and Astrophysics*, 587 :A32, March 2016.
- [16] Frank H. Shu, Susana Lizano, and Fred C. Adams. Star Formation in Molecular Cloud Cores. *Symposium - International Astronomical Union*, 115 :417–434, 1987. Publisher : Cambridge University Press.

A Demonstrations

Les calculs réalisés ci-après sont librement inspirées de la thèse de Benoît Commerçon [14].

Equation 1.2

L'écriture du théorème de Gauss gravitationnel sur une sphère de rayon r permet de déterminer le vecteur associé au champ de gravitation valant

$$\mathbf{g} = -\frac{GM(r)}{r^2}\mathbf{e}_r, \quad (\text{A.1})$$

ce qui entraîne que le potentiel ressenti par une particule de masse dm gravitant à la distance r autour d'une masse M vaut

$$\phi(r) = -dm\frac{GM}{r}. \quad (\text{A.2})$$

Pour déterminer la valeur de l'énergie potentielle de constitution, on raisonne alors par ajout de couches successives de gaz d'épaisseur dr . On somme alors tous les potentiels gravitationnel associés à chaque couche par intégration

$$\Omega = \int_0^R -\frac{GM(r)}{r} dm = -\int_0^R -\frac{G4\pi\rho r^3}{3r} 4\pi\rho r^2 dr = -3G\left(\frac{4\pi\rho}{3}\right)^2 \frac{R^5}{5} = -\frac{3GM^2}{5R}. \quad (\text{A.3})$$

Equation 1.11

Reprenons le calcul de l'équation du Viriel. En effectuant le produit scalaire de la 2nd loi de Newton par \mathbf{r} , puis en développant $\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \mathbf{r} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2$, l'équation peut se ré-écrire sous la forme suivante

$$m\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = m\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 + \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}. \quad (\text{A.4})$$

La quantité $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$ est appelé le "Viriel". Pour un système discret de particules, on définit le moment d'inertie comme

$$I = \sum m\mathbf{r}^2. \quad (\text{A.5})$$

où la somme porte sur toutes les particules du système. En dérivant deux fois ce moment d'inertie, on aboutit alors à l'équation ci-dessous

$$\ddot{I} = 2\frac{d}{dt}\left(\sum m\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right). \quad (\text{A.6})$$

En sommant l'équation (A.4) sur toutes les particules de notre nuage stellaire, on reconnaît le membre de gauche comme valant $\dot{I}/2$. On sépare alors le membre de droite en deux contributions. La première correspond à deux fois l'énergie macroscopique du système considéré (à savoir la somme de l'énergie thermique et de l'énergie cinétique)

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\sum m\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2. \quad (\text{A.7})$$

Le second terme $\sum \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$ correspond, dans notre cas où seul le potentiel gravitationnel est à prendre en compte, à l'énergie potentielle Ω , qui peut s'écrire sous la forme suivante

$$\Omega = -\frac{1}{2} \sum_i G m_i \sum_j \frac{m_j}{\|r_i - r_j\|} = \sum_{i < j} G \frac{m_i m_j}{\|r_i - r_j\|}. \quad (\text{A.8})$$

Equations d'Euler

Les équations de conservation d'Euler avec termes sources liés à la gravitation, couplés aux équations régissant le potentiel gravitationnel s'écrivent

— Equation de Poisson :

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho. \quad (\text{A.9})$$

— Conservation de la masse :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (\text{A.10})$$

— Conservation de la quantité de mouvement :

$$\partial_t \rho \mathbf{v} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + P \mathbb{I}) = -\rho \nabla \Phi. \quad (\text{A.11})$$

— Conservation de l'énergie totale :

$$\partial_t E + \nabla \cdot (\mathbf{v}(E + P + \rho \Phi)) = -\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi. \quad (\text{A.12})$$

Equation 1.14

Le développement perturbatif des quantités fondamentales se présente sous la forme :

$$\begin{cases} \rho &= \rho_0 + \rho_1 \\ P &= P_0 + P_1 \\ \Phi &= \Phi_0 + \Phi_1 \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

On pose alors la vitesse du son isotherme (constante) valant $c_s^2 = P_0/\rho_0 = k_B T/\mu_{\text{mol}} m_H$ et on obtient à partir des équations (A.10), (A.11) ainsi que (A.12), les équations suivantes (dont le développement est réalisé ci-dessous)

$$\Delta \Phi_1 = 4\pi G \rho_1. \quad (\text{A.14})$$

$$\partial_t \rho_1 + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0. \quad (\text{A.15})$$

$$\partial_t \mathbf{v}_1 = -\nabla \Phi_1 - \frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla \rho_1. \quad (\text{A.16})$$

À l'aide de ses trois équations, il est alors possible de composer une équation de propagation, en prenant la dérivée temporelle de (A.15) et la divergence de (A.16)

$$\partial_t^2 \rho_1 - \rho_0 \left(4\pi G \rho_1 + \frac{c_s^2}{\rho_0} \Delta \rho_1 \right) = 0. \quad (\text{A.17})$$

En considérant la perturbation harmonique de $\rho_1 = K e^{i(\omega t + kx)}$, on obtient l'équation de dispersion 1.14.

Equation A.15

Partons de l'équation (A.10) de conservation de la masse et réalisons le développement perturbatif pour obtenir

$$\partial_t(\rho_0 + \rho_1) + \nabla \cdot ((\rho_0 + \rho_1)(\mathbf{v}_1)) = 0. \quad (\text{A.18})$$

Les quantités indicées d'un 0 étant des quantités à l'équilibre, leurs dérivées temporelles et leurs gradients sont nécessairement nuls. De plus, on se limite à l'ordre 1 d'où

$$\partial_t \rho_1 + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{v}_1) = 0. \quad (\text{A.19})$$

Equation A.16

Réalisons le développement perturbatif de l'équation (A.11) pour obtenir, en utilisant les mêmes indications que ci-dessus :

$$\partial_t((\rho_0 + \rho_1)\mathbf{v}_1) + \nabla((\rho_0 + \rho_1)\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1 + (P_0 + P_1)\mathbb{I}) = -(\rho_0 + \rho_1)\nabla(\Phi_0 + \Phi_1) \quad (\text{A.20})$$

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{v}_1 + \nabla(\rho_1 \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1) + \nabla P_1 = -\rho_0 \nabla \Phi_1. \quad (\text{A.21})$$

On a alors immédiatement, en utilisant $c_s^2 = P_1/\rho_1$, que

$$\partial_t \mathbf{v}_1 = -\nabla \Phi_1 - \frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla \rho_1. \quad (\text{A.22})$$

Equation 1.20

Afin de résoudre cette équation, on procède tout d'abord en multipliant par dr/dt , ce qui donne

$$\frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{4\pi \rho_0 a^3}{3} \frac{dr}{dt} \frac{1}{r^2}. \quad (\text{A.23})$$

Cette équation peut être re-écrite plus simplement avec deux dérivées temporelles telle que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = G \frac{4\pi \rho_0 a^3}{3} \frac{d(1/r)}{dt}. \quad (\text{A.24})$$

Considérons désormais la racine carré de l'intégrale de l'équation (A.24) avec pour conditions initiales pour le rayon $r = a$ et pour sa dérivée $dr/dt = 0$ (nuage statique). Ces hypothèses impliquent

$$\frac{dr}{dt} = - \left(\frac{8\pi G \rho_0 a^2}{3} \left(\frac{a}{r} - 1 \right) \right)^{1/2}. \quad (\text{A.25})$$

où l'on introduit un signe moins dans l'équation lors du passage à la racine pour ne retenir que la solution physiquement viable, à savoir que le rayon de la sphère diminue du fait de l'effondrement.

Tout d'abord, il convient de re-écrire l'équation (A.25) afin de faire apparaître une forme analytiquement intégrable

$$\frac{1}{a} \frac{dr}{dt} = - \left(\frac{8\pi G \rho_0}{3} \left(\frac{a}{r} - 1 \right) \right)^{1/2} = - \left(\frac{8\pi G \rho_0}{3} \right)^{1/2} \left(\frac{1 - r/a}{r/a} \right)^{1/2} \quad (\text{A.26})$$

$$\left(\frac{r/a}{1 - r/a} \right)^{1/2} d \left(\frac{r}{a} \right) = - \left(\frac{8\pi G \rho_0}{3} \right)^{1/2} dt. \quad (\text{A.27})$$

Si l'on pose le changement de variable $x = r/a = \cos^2(\beta)$, alors $dx = -2\sin(\beta)d\beta$, et l'on peut résoudre analytiquement l'équation. On intègre alors entre $x = 1$ et $x = 0$, et entre $t = 0$ et $t = t_{\text{ff}}$

$$\int_1^0 \left(\frac{x}{1-x} \right)^{1/2} dx = - \left(\frac{8\pi G \rho_0}{3} \right)^{1/2} t_{\text{ff}}. \quad (\text{A.28})$$

Or, $\left(\frac{x}{1-x} \right)^{1/2} = \tan \beta$ grâce au changement de variable ci-haut, d'où la résolution de l'intégrale est immédiate

$$\int_1^0 \left(\frac{x}{1-x} \right)^{1/2} dx = -2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \beta d\beta = - \int_0^{\pi/2} 1 + \cos 2\beta d\beta = -\frac{\pi}{2}, \quad (\text{A.29})$$

ce qui conclut.

Rayon théorique du disque

Pour démontrer le rayon théorique du disque, si l'on choisit une particule située à l'extrémité de celui-ci et que l'on considère le système à l'équilibre alors la force centrifuge a pour expression $dm r \omega^2 \mathbf{u}_r$ dans le plan équatorial et la force de gravitation $-dm GM_{\text{disk}}/R_{\text{disk}}^2 \mathbf{u}_r$. Dans ce régime d'équilibre, la vitesse est purement orthoradiale d'où $\omega = v_\theta/r$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{MG}{R^2} = \omega^2 R = \frac{v_\theta^2}{R}. \quad (\text{A.30})$$

On montre alors que

$$\omega_0 R_0^2 = v_\theta R_{\text{disk}} = \sqrt{GM_{\text{disk}} R_{\text{disk}}}, \quad (\text{A.31})$$

ce qui conclut.

Équation de la MHD non-idéale

Dans le cadre de la MHD non-idéale, il convient tout d'abord de réaliser quelques approximations :

1. Le fluide est considéré non relativiste : $v \ll c$.
2. fluide collisionnel : $v \ll L/\tau_c$, où τ_c est le taux de collision au sein du milieu et L une distance caractéristique.
3. Le milieu est quasi-neutre électriquement : $n_i = n_e$ où n_i et n_e représentent respectivement la densité particulière des ions et des électrons.
4. Les échelles spatiales et temporelles sont faibles devant le rayon de Larmor et le temps de giration.

On tire plusieurs conséquences de ceci, notamment que

$$\rho = n_e m_e + n_i m_i = n(m_e + m_i) \sim n_i m_i \quad (\text{A.32})$$

$$\mathbf{v} = \frac{n_e m_e \mathbf{v}_e + n_i m_i \mathbf{v}_i}{n_e m_e + n_i m_i} \sim \mathbf{v}_i \quad (\text{A.33})$$

$$\mathbf{j} = e(n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e) = ne(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \quad (\text{A.34})$$

$$P = P_e + P_i, \quad (\text{A.35})$$

où P représente la pression, \mathbf{v} la vitesse moyenne du fluide, ρ sa densité et \mathbf{j} son vecteur densité de courant.

On peut alors généraliser la loi d'Ohm en séparant d'abord le fluide étudiée en un fluide d'électrons et un fluide d'ions pour lesquels on écrit le principe fondamental de la dynamique

$$n_e m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -\nabla P_e - n_e e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - n_e m_e \nu (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) \quad (\text{A.36})$$

$$n_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\nabla P_e + n_i e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - n_i m_i \nu (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) \quad (\text{A.37})$$

où $n_i m_i \nu (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)$ représente une force collisionnelle avec le facteur ν , inverse d'un temps caractéristique de collision. En observant que $(\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i) = \mathbf{j}/ne$, on peut alors re-écrire les équations sous la forme

$$\frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -\frac{\nabla P_e}{n_e m_e} - \frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) + \frac{\nu \mathbf{j}}{ne} \quad (\text{A.38})$$

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_i - \frac{\mathbf{j}}{ne} \sim \mathbf{v} - \frac{\mathbf{j}}{ne}, \quad (\text{A.39})$$

ce qui permet de conclure, en négligeant le terme d'inertie électronique $d\mathbf{v}_e/dt$ ainsi que ∇P_e du fait de l'approximation fluide, que

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{ne} + \frac{\nu m_e}{ne^2} \mathbf{j}. \quad (\text{A.40})$$

Finalement, à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday, on aboutit à :

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left[\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \underbrace{\frac{\eta_\Omega \mathbf{j}}{\text{Ohm}}}_{\text{Ohm}} - \underbrace{\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{ne}}_{\text{Hall}} \right], \quad (\text{A.41})$$

où $\eta_\Omega = \nu m_e / ne^2$ représente la résistivité de l'effet d'Ohm.

B Liste des simulations

α	β	δ	μ	solueur	min	N_J	n_{expand}	ambi	θ	ϕ_1	ϕ_2
0.35	0	0	0	llf	5	4	2	non	0	0	0
0.35	0	0	0	llf	5	8	2	non	0	0	0
0.35	0	0	0	llf	5	12	2	non	0	0	0
0.35	0	0	0	llf	5	16	2	non	0	0	0
0.35	0	0	0	llf	6	12	2	non	0	0	0
0.35	0	0	0	llf	7	12	2	non	0	0	0
0.35	0	0	0	llf	6	12	1	non	0	0	0
0.35	0	0	0	llf	6	12	4	non	0	0	0
0.5	0	0	0	llf	6	12	2	non	0	0	0
0.5	0.005	0	0	llf	6	12	2	non	0	0	0
0.5	0.01	0	0	llf	6	12	2	non	0	0	0
0.5	0.02	0	0	llf	6	12	2	non	0	0	0
0.5	0.03	0	0	llf	6	12	2	non	0	0	0
0.35	0.005	0	0	llf	6	12	2	non	0	0	0
0.35	0.01	0	0	llf	6	12	2	non	0	0	0
0.35	0.02	0	0	llf	6	12	2	non	0	0	0
0.35	0.03	0	0	llf	6	12	2	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	5	4	1	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	5	12	1	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	5	16	1	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	5	4	2	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	5	12	2	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	5	16	2	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	5	4	4	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	5	12	4	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	5	16	4	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	6	4	1	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	6	12	1	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	6	16	1	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	6	4	2	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	6	12	2	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	6	16	2	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	6	4	4	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	6	12	4	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	6	16	4	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	7	4	1	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	7	12	1	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	7	16	1	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	7	4	2	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	7	12	2	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	7	16	2	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	7	4	4	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	7	12	4	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	7	16	4	non	0	0	0

α	β	δ	μ	solveur	min	N_J	n_{expand}	ambi	θ	ϕ_1	ϕ_2
0.5	0.005	0.1	0	llf	6	12	2	non	0	0	0
0.5	0.01	0.1	0	llf	6	12	2	non	0	0	0
0.5	0.02	0.1	0	llf	6	12	2	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	llf	6	12	2	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	llf	6	12	2	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	llf	6	12	2	non	0	13	0
0.5	0.03	0.1	0	llf	6	12	2	non	0	45	0
0.5	0.03	0.1	0	llf	6	12	2	non	0	77	0
0.5	0.03	0.1	5	llf	6	17	2	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	5	llf	6	17	2	non	0	13	0
0.5	0.03	0.1	5	llf	6	17	2	non	0	45	0
0.5	0.03	0.1	5	llf	6	17	2	non	0	77	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	6	12	2	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	6	12	2	non	0	13	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	6	12	2	non	0	45	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	6	12	2	non	0	77	0
0.5	0.03	0.1	0	hll	6	12	2	non	0	45	13
0.5	0.03	0.1	0	hll	6	12	2	non	0	45	45
0.5	0.03	0.1	0	hll	6	12	2	non	0	45	77
0.5	0.03	0.1	5	llf	6	12	2	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	5	llf	6	12	2	non	0	45	0
0.5	0.03	0.1	5	llf	6	12	2	non	0	45	45
0.5	0.03	0.1	5	hlld	6	12	2	non	0	0	0
0.5	0.03	0.1	5	hlld	6	12	2	non	0	45	0
0.5	0.03	0.1	5	hlld	6	12	2	non	0	45	45
0.5	0.03	0.1	5	hlld	6	17	2	non	0	45	0
0.5	0.03	0.1	5	hlld	6	21	2	non	0	45	45
0.5	0.03	0.1	5	llf	6	12	2	non	45	0	0
0.5	0.03	0.1	5	llf	6	12	2	non	45	45	0
0.5	0.03	0.1	5	llf	6	12	2	non	45	45	45
0.5	0.03	0.1	5	hlld	6	12	2	non	45	0	0
0.5	0.03	0.1	5	hlld	6	12	2	non	45	45	0
0.5	0.03	0.1	5	hlld	6	12	2	non	45	45	45
0.5	0.03	0.1	5	hlld	6	17	2	non	45	45	0
0.5	0.03	0.1	5	hlld	6	21	2	non	45	45	45
0.5	0.03	0.1	5	hlld	5	8	4	oui	0	0	0
0.5	0.03	0.1	5	hlld	5	8	4	oui	0	45	0
0.5	0.03	0.1	5	hlld	5	8	4	oui	0	45	45

C Diffusion ambipolaire

Toutefois, en plus des résultats présentés dans ce rapport, j'ai été amené à introduire au cours de trois simulations une correction à la MHD idéale due à la diffusion ambipolaire, qui tient compte au sein du nuage de gaz de l'interaction entre les particules chargées et les particules neutres [15]. Le calcul est réalisé dans l'approximation 1-fluide par Shu et al. en 1987 [16] en calculant la différence de vitesse entre les ions et les neutres et en le reliant à la force volumique de Lorentz par un coefficient de freinage. On note ρ_i et ρ_n respectivement la densité des ions et des neutres, ainsi que γ_{AD} le coefficient de freinage, ce qui donne

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times \left(\mathbf{v}_n + \frac{[(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B}}{\gamma_{\text{AD}} \rho_i \rho_n} \right). \quad (\text{C.1})$$