Ecole Normale Supérieure de Lyon Université de Lyon 1
Licence de Physique, Parcours Sciences de la Matière, A. A. 2011-2012

Première exploration du monde quantique

Examen + corrigé - 17 janvier 2012 (3h)

Données utiles

$\hbar = 1.055 * 10^{-34}$ J s
vitesse de la lumière: $c = 3.0 * 10^8$ m/s
masse de l'électron: $m_e = 9.1 * 10^{-31}$ Kg
magnéton de Bohr nucléaire: $\mu_B = 5.0 * 10^{-27}$ J T^{-1}
facteur gyromagnétique du neutron $g = -3.83$

Formules (éventuellement) utiles pour l'oscillateur harmonique:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger)$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2}\ a_{\rm ho}\ 2^n\ n!}}\ H_n(x/a_{\rm ho})\ \exp[-x^2/(2a_{\rm ho}^2)]$$

$$a_{\rm ho} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \qquad H_0(u) = 1 \qquad H_1(u) = 2u$$

Correction au deuxième ordre à l'énergie de l'état fondamental $|0\rangle$, induite par une perturbation $\hat{V}$:

$$\Delta E^{(2)} = \sum_{\alpha \neq 0} \frac{|\langle \alpha|\hat{V}|0\rangle|^2}{E_0 - E_\alpha}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)$$

1 Questions courtes

Ces questions ne demandent pas de calculs élaborés!

1.1

a) Une particule de masse m est piégée dans une région de l'espace de dimension linéaire a. Elle se trouve dans son état fondamental. Estimer l' énergie nécessaire pour porter le système dans son premier état excité.

On peut utiliser plusieurs modèles simples pour répondre à cette question: pour un oscillateur harmonique $\Delta E = \hbar\omega = \hbar^2/(ma^2)$ où a est la longueur de l'oscillateur harmonique; pour une boîte de potentiel infiniment profonde, $(3\pi^2/2)\ \hbar^2/(ma^2)$. En géneral, $\Delta E \sim \hbar^2/(ma^2)$.

b) Si la particule est un électron, et $a = 1$ Å, estimer la longueur d'onde du photon que le système doit absorber pour pouvoir être porté dans cet état excité. Ce résultat est-il pertinent pour l'atome d'hydrogène?

On a besoin d'un photon avec longueur d'onde λ telle que $hc/\lambda \sim \hbar^2/(ma^2)$; on obtient $\lambda \sim$ 100 nm. Cette longueur d'onde est pertinente pour l'atome d'hydrogène, dans le quel l'électron est piégé sur une longueur de l'ordre du rayon de Bohr, 0.5 Å.

1.2

a) On mesure un moment angulaire $L_z = 3\hbar$ dans un atome d'hydrogène. Quels sont les états propres du Hamiltonien compatibles avec un tel résultat?

Les états $|nlm\rangle$ avec $l \geq 3$, $n > l$.

b) Un atome d'hydrogène absorbe un photon avec énergie

$$\hbar\omega = \frac{5}{36}\mathrm{Ry} \qquad \mathrm{Ry} = \frac{\hbar^2}{2ma_0^2} \qquad (a_0 = \text{rayon de Bohr}). \tag{1}$$

Entre quels niveaux d'énergie la transition a-t-elle eu lieu?

Entre les niveaux $n = 2$ et $n = 3$.

1.3

Deux électrons se trouvent piégés dans un puits de potentiel carré infiniment profond, de largeur L. Ecrire la fonction d'onde (spatiale et de spin) de l'état fondamental et d'au moins un des états associés au premier niveau excité.

Etat fondamental:

$$\Psi_0(x_1, x_2; \sigma_1, \sigma_2) = \frac{2}{L}\sin(\pi x_1/L)\sin(\pi x_2/L)\ \frac{|\uparrow_1\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\uparrow_2\rangle}{\sqrt{2}}$$

Etat excité (singulet de spin):

$$\Psi_1(x_1, x_2; \sigma_1, \sigma_2) = \frac{2}{L}[\ \sin(2\pi x_1/L)\sin(\pi x_2/L) + \sin(\pi x_1/L)\sin(2\pi x_2/L)]\ \frac{|\uparrow_1\downarrow_2\rangle - |\downarrow_1\uparrow_2\rangle}{\sqrt{2}}$$

A cet état s'ajoutent 3 autres états excités de triplet de spin (avec partie spatiale symétrique).

2 Exercice. Inégalité d'Heisenberg pour les spins

Dans cet exercice on va utiliser l'inegalité de Heisenberg

$$(\Delta_\psi A)(\Delta_\psi B) \;\geq\; \frac{1}{2}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle_\psi| \tag{2}$$

appliquée aux opérateurs de spin $S = 1/2$, $\hat{A} = \hat{S}^x$, $\hat{B} = \hat{S}^y$, en considérant l'état de spin $|\psi\rangle = \alpha|\uparrow_z\rangle + \beta|\downarrow_z\rangle$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

2.1

Calculer $(\Delta_\psi S_x)^2 = \langle \hat{S}_x^2\rangle_\psi - \langle \hat{S}_x\rangle_\psi^2$, ainsi que $(\Delta_\psi S_y)^2$.

$$(\Delta_\psi S_x)^2 = \frac{1}{4}\left[1 - 4(\alpha\beta)^2\right] \qquad\qquad (\Delta_\psi S_y)^2 = \frac{1}{4}$$

2.2

Montrer que l'inégalité de Heisenberg est saturée dans le cas des opérateurs de spin $S = 1/2$ pour l'état $|\psi\rangle$ considéré.

Le côté droit de l'inégalité vaut $(\alpha^2 - \beta^2)/4$. On montre facilement que cette expression équivaut au côté gauche.

3 Problème. Oscillateur harmonique asymétrique à deux dimensions

On considère un oscillateur harmonique en deux dimensions, perturbé par un terme qui couple les coordonnées x et y.

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) + \gamma\;\hat{x}\hat{y} \tag{3}$$

I) Solution exacte

Le problème est exactement soluble avec un changement de variable. On introduit les nouvelles variables position η, ξ, obtenues par rotation du référentiel:

$$x = \cos\theta\;\eta + \sin\theta\;\xi \qquad\qquad y = -\sin\theta\;\eta + \cos\theta\;\xi \tag{4}$$

telles que

$$x^2 + y^2 + 2\delta\;xy = A\eta^2 + B\xi^2 \tag{5}$$

où $\delta = \gamma/(m\omega^2)$, et A, B sont des constantes.

3.1

Déterminer une solution possible pour l'angle θ, et vérifier que les constantes A et B prennent les valeurs $1 \pm \delta$.

$\theta = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4$.

3.2

On admettra que $p_x^2 + p_y^2 = {p_\eta}^2 + p_\xi^2$, où p_η et p_ξ sont les impulsions conjuguées aux nouvelles variables. Montrer que le Hamiltonien prend la forme de celui de deux oscillateurs harmoniques découplés, et déterminer les valeurs propres possibles.

$$\mathcal{H} = \frac{{p_\eta}^2 + p_\xi^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 A\eta^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 B\xi^2$$

$$E(n_\eta, n_\xi) = \hbar\omega\sqrt{1+\delta}\left(n_\eta + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\sqrt{1-\delta}\left(n_\xi + \frac{1}{2}\right)$$

3.3

Déterminer explicitement les trois premiers niveaux d'énergie et leur dégénérescence dans le cas $\gamma = 0$. Montrer que la dégénérescence est levée dans le cas $\gamma \neq 0$.

$\gamma = 0$: $E_0 = \hbar\omega$, $g = 1$; $E_1 = 2\hbar\omega$, $g = 2$, $E_2 = 3\hbar\omega$, $g = 3$.
$\gamma \neq 0$: les premiers 6 niveaux sont $\hbar\omega(\sqrt{1+\delta}/2 + \sqrt{1-\delta}/2)$, $\hbar\omega(3\sqrt{1+\delta}/2 + \sqrt{1-\delta}/2)$, $\hbar\omega(\sqrt{1+\delta}/2 + 3\sqrt{1-\delta}/2)$, $\hbar\omega(3\sqrt{1+\delta}/2 + 3\sqrt{1-\delta}/2)$, $\hbar\omega(5\sqrt{1+\delta}/2 + \sqrt{1-\delta}/2)$, $\hbar\omega(\sqrt{1+\delta}/2 + 5\sqrt{1-\delta})/2)$.

II) Solution perturbative

On suppose maintenant que $\gamma \ll m\omega^2/2$, et on traite le terme $\gamma\ \hat{x}\hat{y}$ par la théorie des perturbations.

3.4

Calculer la correction du premier ordre ($\Delta E^{(1)}$) à l'énergie de l'état fondamental du système non perturbé.

$\Delta E^{(1)} = 0$.

3.5

Calculer la correction à l'énergie de l'état fondamental au deuxième ordre ($\Delta E^{(2)}$). Comparer le résultat perturbatif avec la solution exacte.

$\Delta E^{(2)} = -\frac{1}{8}\hbar\omega\delta^2$.

3.6

Calculer les corrections de premier ordre à l'énergie du premier niveau excité. Montrer que le clivage qui en résulte est compatible avec la solution exacte.

Les deux états dégénérés sont clivés comme suit: $\hbar\omega(2 \pm \delta/2)$.

4 Problème. Rotations d'un spin 1/2, signe du vecteur d'état, et interférométrie à neutrons

I) Rotations du spin 1/2

Les états de spin $S = 1/2$ se transforment par rotation d'un angle ϕ autour d'un axe $\vec{n}$ comme

$$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = e^{-i\phi\ \vec{n}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}}|\psi\rangle = \Big[\cos(\phi/2)\mathbb{1} - 2i\sin(\phi/2)\ \vec{n}\cdot\hat{\boldsymbol{S}}\Big]\,|\psi\rangle \tag{6}$$

4.1

Montrer que la rotation d'un angle $\phi = 2\pi$, change le signe du vecteur d'état.

C'est une simple application de la formule Eq. (6).

4.2

Considérons un neutron, de moment magnétique $g\mu_B\hat{\boldsymbol{S}}$, immergé dans un champ magnétique $\boldsymbol{B}$. Si le spin se trouve dans l'état $|\psi\rangle$ au temps initial, déterminer l'instant T au quel l'état a changé de signe.

$T = \frac{2\pi\hbar}{|g|\mu_B B}$.

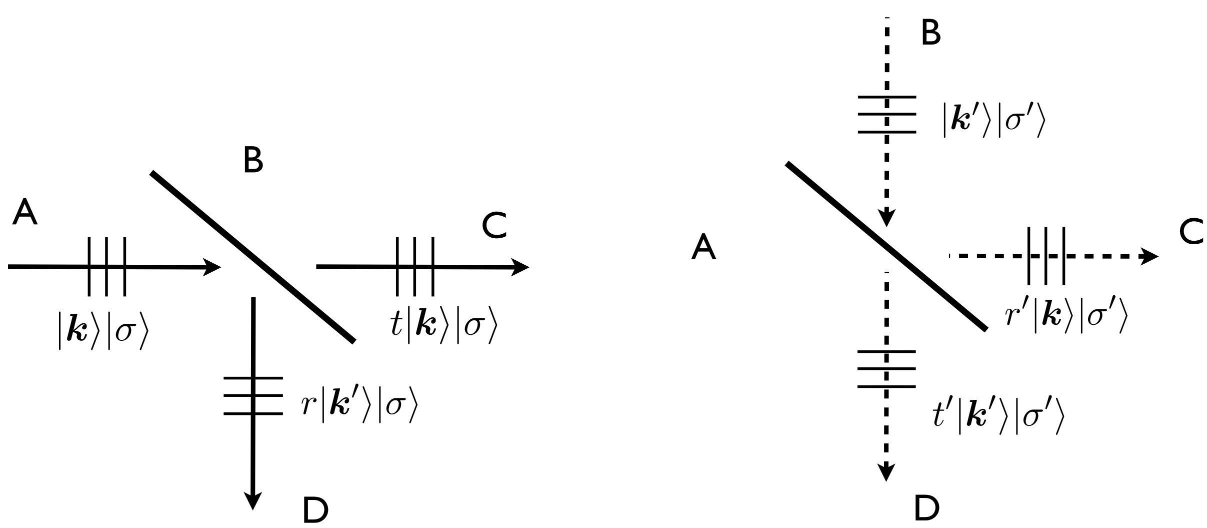

Figure 1: Diviseur de faisceau.

II) Diviseur de faisceau

Cette propriété bizarre des états de spin $S = 1/2$ a été mise en évidence par interférométrie des neutrons. On considére maintenant la description quantique d'un interféromètre de Mach-Zehnder à neutrons.

On s'occupe dans un premier temps de la description d'un diviseur de faisceau (*beam splitter*, BS), élément essentiel de tout interféromètre. Dans les deux voies du BS, on envoie des ondes planes normalisées $|\boldsymbol{k}\rangle|\sigma\rangle$ (entrée A) et $|\boldsymbol{k}'\rangle|\sigma'\rangle$ (entrée B) avec $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{k}'$, comme montré en Fig. 1. On considère que les états de spin $|\sigma\rangle$ et $|\sigma'\rangle$ sont deux états arbitraires, qui ne sont pas affectés par la propagation à travers du BS.

Quand on envoie une onde plane $|\boldsymbol{k}\rangle|\sigma\rangle$ en A, on obtient en sortie:

$$\big(t\ |\boldsymbol{k}\rangle + r\ |\boldsymbol{k}'\rangle\big)\ |\sigma\rangle$$

alors que, si on envoie une onde plane $|\boldsymbol{k}'\rangle|\sigma'\rangle$ en B, on obtient en sortie:

$$\big(t'\ |\boldsymbol{k}'\rangle + r'\ |\boldsymbol{k}\rangle\big)\ |\sigma'\rangle$$

Ici r, r' et t, t' sont les amplitudes de reflection et transmission associées aux différents entrées et sorties. Dans la suite on prendra $r, t, r', t' \in \mathbb{R}$.

4.3

a) Justifier que $r^2 + t^2 = (r')^2 + (t')^2 = 1$.

C'est une simple conséquence de la normalisation de deux états sortants dans les deux cas précedents.

b) Si l'état d'entrée de la particule est une superposition de deux ondes planes:
$\alpha\ |\boldsymbol{k}\rangle|\sigma\rangle + \beta\ |\boldsymbol{k}'\rangle|\sigma'\rangle \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$
écrire l'état en sortie. Montrer que la condition $r = r'$, $t = -t'$ garantit que l'état en sortie est encore normalisé.

La norme de l'état en sortie est

$$(t^2 + r^2)|\alpha|^2 + (t'^2 + r'^2)|\beta|^2 + 2\ (tr' + t'r)\ \mathrm{Re}(\ \langle\sigma|\sigma'\rangle\ \alpha^*\beta\ ).$$

qui vaut 1 avec la condition ci-dessus.

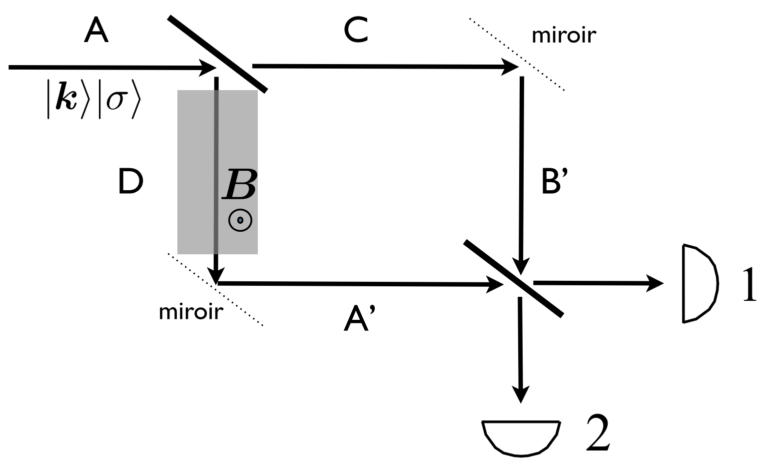

Figure 2: Interféromètre de Mach-Zehnder.

III) Interféromètre de Mach-Zehnder

On considère maintenant un interféromètre de Mach-Zehnder, présenté en Fig. 2, dans lequel on envoie une onde plane dans le bras A. L'état initial de spin est $|\sigma\rangle = a|\uparrow_z\rangle + b|\downarrow_z\rangle$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$. L'interféromètre est composé de deux BS et deux deux miroirs parfaits (BS avec $r = r' = 1$, $t = t' = 0$). Sur le bras D un champ magnétique uniforme est appliqué, avec $\boldsymbol{B} = B\vec{z}$. Soit τ le temps de parcours pour un neutron dans le bras D.

4.4

Ecrire les composantes de la fonction d'onde du neutron sur les bras A' et B'.

A': $|\boldsymbol{k}\rangle \left(a\ e^{i\delta}|\uparrow_z\rangle + b\ e^{-i\delta}|\downarrow_z\rangle\right)$ *B'*: $|\boldsymbol{k}'\rangle\,(a|\uparrow_z\rangle + b|\downarrow_z\rangle)$

Montrer que les composantes qui arrivent aux deux détecteurs 1 et 2 sont

$$1: \quad |\boldsymbol{k}\rangle\ \Big[\ a\ t\ r\ (1+e^{i\delta})\ |\uparrow\rangle + b\ t\ r\ (1+e^{-i\delta})\ |\downarrow\rangle\ \Big]$$

$$2: \quad |\boldsymbol{k}'\rangle\ \Big[\ a\ (-t^2+e^{i\delta}r^2)\ |\uparrow\rangle + b\ (-t^2+e^{-i\delta}r^2)\ |\downarrow\rangle\ \Big]$$

où $\delta = \omega\tau/2$, et $\omega = |g|\mu_B B/\hbar$ est la fréquence de Larmor.

C'est une simple conséquence des règles de propagation à travers du BS.

4.5

Calculer les probabilités P_1 et P_2 que le neutron soit détecté par chacun des deux detécteurs. Si on envoie n neutrons par unité de temps dans le bras A de l'interféromètre, exprimer les courants (nombres de particules par unité de temps) I_1 et I_2 des neutrons détectés aux deux détecteurs.

$P_1 = 2(tr)^2(1+\cos\delta)$ $\qquad P_2 = 1 - P_1$.
$I_{1(2)} = nP_{1(2)}$

4.6

Montrer que $I_1 + I_2 = n$, alors que $I_2 - I_1$ est une fonction oscillante de δ. Justifier que cette expérience permet de mesurer le changement du signe du vecteur d'onde après une rotation de 2π.

$I_2 - I_1 = n[1 - 4(tr)^2(1+\cos\delta)]$.
Le changement de signe peut etre mésuré grâce à la dependence de cette différence en δ, et il correspond à la condition $\delta = \pi$.

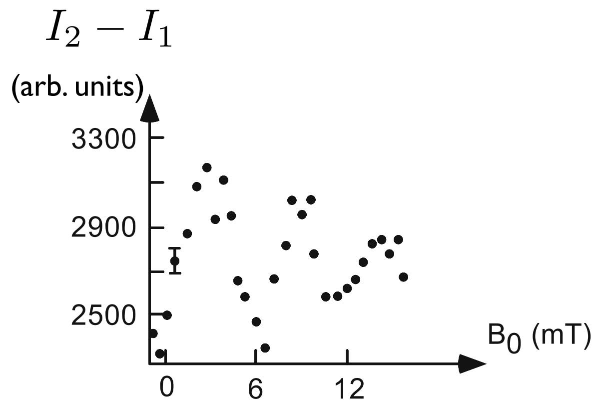

Figure 3: Résultat experimental de l'interférométrie à neutrons (depuis S. A. Werner *et al.*, Phys. Rev. Lett. **35**, 1053 (1975)).

4.7

La figure 3 montre les résultats d'une expérience d'interférométrie avec des neutrons; on trouve que la période des oscillations est 6.4 mT. Déterminer le temps τ.

Le temps τ corréspond à $h/(|g|\mu_B B)$ où $B = 3.2$ mT. On trouve que $\tau \approx 10^{-5}$ s.

4.8

Question bonus. Quelle conclusion peut-on en tirer? La phase du vecteur d'état a-t-elle une signification physique?

La phase du vecteur d'onde n'a pas de signification au sense absolu, mais on peut détecter ses variations par interférence avec un état de référence dont la phase n'a pas été altérée.