

**Examen - 16 janvier 2013 (3h)****Données utiles**

Etats propres de l'oscillateur harmonique à partir du fondamental

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

Développement en série de l'exponentiel

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Théorème de Hausdorff-Campbell-Baker: pour des opérateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  tel que  $[\hat{A}, \hat{B}] = c \hat{1}$  où  $c$  est un nombre complexe, on a

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]}$$

Opérateurs montée/descente de spin

$$\hat{S}^\pm = \hat{S}^x \pm i\hat{S}^y$$

Formule utile pour la transformation canonique des opérateurs de spin:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{S}^z\phi}\hat{S}^\pm e^{\frac{i}{\hbar}\hat{S}^z\phi} = e^{\mp i\phi}\hat{S}^\pm$$

**1 Questions courtes**

*Ces questions ne demandent pas de calculs élaborés!*

**1.1**

Un électron est piégé dans un puits de potentiel de profondeur infinie et largeur  $L$ , avec une énergie de  $8\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$ . Quelle est la probabilité de trouver la particule au centre du puits?

**1.2**

Une particule de masse  $m$  à une dimension est soumise au potentiel suivant

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2ma^2} \left( \frac{a^2 p(p+1)}{x^2} - \frac{2a}{x} \right) \quad (1)$$

où  $p \in \mathbb{N}$  et  $a$  est une constante ayant les dimensions d'une longueur. Existe-t-il un état lié pour toute valeur de  $p > 0$ ? Que vaut son énergie minimale?

*(Suggestion: se souvenir de l'atome d'hydrogène...).*

### 1.3

On mesure la projection du moment angulaire total (orbitaire + spin) de l'électron d'un atome d'hydrogène, et on obtient  $M = 5/2$ . Si en suite on mesure l'énergie, quelles valeurs peut-on exclure à priori?

## 2 Exercice. Oscillateur harmonique périodiquement forcé et états cohérents

Dans cet exercice on s'intéresse à l'évolution d'un oscillateur harmonique quantique sous forçage périodique.

On commence d'abord en considérant un oscillateur harmonique sans forçage

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \quad (2)$$

dont les états propres sont notés  $|n\rangle$  et les valeurs propres sont notés  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ .

On introduit les opérateurs de création/destruction  $\hat{a}^\dagger$  et  $\hat{a}$  tels que

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) . \quad (3)$$

On a que:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (4)$$

### Partie I. Etats cohérents, opérateur de déplacement, transformation canonique des opérateurs de création/destruction

Les états cohérents  $|z\rangle$ ,  $z \in \mathbb{C}$  sont les états propres de l'opérateur destruction,  $\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle$ , et  $\langle z|\hat{a}^\dagger = z^*\langle z|$ .

(Attention à la notation:  $|n\rangle$  n'est pas un état cohérent avec  $z = n!$ )

#### 2.1

Vérifier que  $|z\rangle$  peut être écrit comme

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle . \quad (5)$$

Démontrer que

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} e^{z\hat{a}^\dagger} |0\rangle . \quad (6)$$

#### 2.2

On introduit l'opérateur dit de déplacement

$$\hat{\mathcal{D}}(z) = e^{z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a}} . \quad (7)$$

En utilisant le théorème de Hausdorff-Campbell-Baker montrer que

$$\hat{\mathcal{D}}(z)|0\rangle = |z\rangle . \quad (8)$$

### 2.3

Démontrer que

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_0 t}|z\rangle = e^{-i\omega t/2} |\tilde{z}(t)\rangle \quad (9)$$

où  $\tilde{z}(t) = z e^{-i\omega t}$ .

### 2.4

On considère la transformation canonique

$$\hat{a}(\phi) = e^{i\phi\hat{n}} \hat{a} e^{-i\phi\hat{n}} \quad (10)$$

où  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ . Montrer que

$$\hat{a}(\phi) = e^{-i\phi} \hat{a} \quad (11)$$

et en déduire l'expression pour  $\hat{a}^\dagger(\phi)$ .

(*Suggestion*: calculer  $d\hat{a}(\phi)/d\phi$ ).

## Partie II. Oscillateur harmonique forcé périodiquement

On imagine que, à l'instant  $t = 0$ , à l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique s'ajoute un terme de forçage périodique

$$\hat{\mathcal{H}}(t > 0) = \hat{\mathcal{H}}_0 + F \sin(\omega_0 t) \hat{x} \quad (12)$$

Soit  $|\psi(t)\rangle$  la solution à l'équation de Schrödinger dépendante du temps:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{\mathcal{H}}(t) |\psi(t)\rangle . \quad (13)$$

On va travailler dans l'image de l'interaction pour l'évolution temporelle, pour la quelle

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_0 t} |\psi(t)\rangle . \quad (14)$$

Comme vu en cours,  $|\psi_I(t)\rangle$  satisfait l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = \hat{V}_I(t) |\psi_I(t)\rangle \quad (15)$$

où  $\hat{V}(t) = F \sin(\omega_0 t) \hat{x}$ , et

$$\hat{V}_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_0 t} \hat{V}(t) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_0 t} . \quad (16)$$

### 2.5

En s'appuyant sur le résultat de la question 2.4, montrer que

$$\hat{V}_I(t) = F \sin(\omega_0 t) \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left( e^{-i\omega t} \hat{a} + e^{i\omega t} \hat{a}^\dagger \right) . \quad (17)$$

### 2.6

On considère  $\omega_0 = \omega$  d'ici à la fin de l'exercice. Sous cette hypothèse  $\hat{V}_I(t)$  contient une partie indépendante du temps et une partie oscillante de moyenne zéro. Dans la suite on va négliger la partie oscillante (approximation dite de l'*onde tournante*). Montrer que dans cette approximation  $\hat{V}_I(t) \sim \hat{p}$ .

## 2.7

En utilisant la même approximation écrire l'opérateur d'évolution temporelle dans l'image de l'interaction,  $\hat{U}_I(t)$  tel que

$$|\psi_I(t)\rangle = \hat{U}_I(t)|\psi_I(0)\rangle . \quad (18)$$

Montrer que l'opérateur d'évolution a la forme d'un opérateur de déplacement comme à la question 2.2, pour lequel il faut déterminer le paramètre  $z$ .

Conclure que, si l'oscillateur harmonique est initialement dans l'état fondamental, il se trouve dans un état cohérent à tout moment  $t > 0$ .

(*Suggestion*: calculer  $|\psi_I(t)\rangle$ , puis  $|\psi(t)\rangle$ . Utiliser le résultat de la question 2.3).

## 2.8

Calculer  $\langle \hat{x} \rangle_t = \langle \psi(t) | \hat{x} | \psi(t) \rangle$ , et montrer que la particule décrit un mouvement oscillatoire en opposition de phase par rapport au forçage, et avec une amplitude croissante dans le temps.

## 3 Problème. Couplage spin-orbite pour une particule à une dimension

Dans cet exercice on se propose d'étudier les conséquences du couplage spin-orbite qui a été récemment réalisé dans des expériences de physique atomique (Y.-J. Lin *et al.*, Nature 471, 83 (2011); L. W. Cheuk *et al.*, Phys. Rev. Lett. 109, 095302 (2012)). Ce couplage est le résultat de l'interaction entre deux lasers et un atome pour lequel seulement deux niveaux internes d'énergie sont impliqués dans les processus physiques en question. Donc dans ces conditions l'atome se comporte comme s'il avait un spin  $S = 1/2$  - par simplicité vous pouvez imaginer aussi bien qu'il s'agit d'un électron.

Dans la suite on va se restreindre à une seule dimension spatiale. L'interaction entre l'atome et les lasers donne lieu à l'Hamiltonien effectif suivant pour la dynamique de l'atome

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \delta \hat{S}^z + \Omega \left( \hat{S}^x \cos(2k_L \hat{x}) - \hat{S}^y \sin(2k_L \hat{x}) \right) \quad (19)$$

où  $k_L$  est le vecteur d'onde des lasers, et  $\delta$  et  $\Omega$  sont des constantes avec les dimensions physique d'une fréquence.

### Partie I. Hamiltonien avec interaction spin-orbite

#### 3.1

On introduit l'opérateur de rotation du spin autour de l'axe  $z$

$$\hat{\mathcal{R}}_z(\phi) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{S}^z \phi}. \quad (20)$$

Montrer que

$$\hat{\mathcal{R}}_z(\phi) \hat{S}^x \hat{\mathcal{R}}_z^\dagger(\phi) = \cos \phi \hat{S}^x + \sin \phi \hat{S}^y \quad (21)$$

#### 3.2

Maintenant on imagine une transformation du Hamiltonien de Eq. (19) en effectuant une rotation locale du référentiel de spin, c'est à dire qu'on applique une rotation de spin avec un angle qui dépend de la position,  $\phi = \phi(x)$ . Montrer que pour  $\phi(x) = -2k_L x$

$$\hat{\mathcal{R}}_z^\dagger(\phi) \left[ \delta \hat{S}^z + \Omega \left( \hat{S}^x \cos(2k_L x) - \hat{S}^y \sin(2k_L x) \right) \right] \hat{\mathcal{R}}_z(\phi) = \delta \hat{S}^z + \Omega \hat{S}^x \quad (22)$$

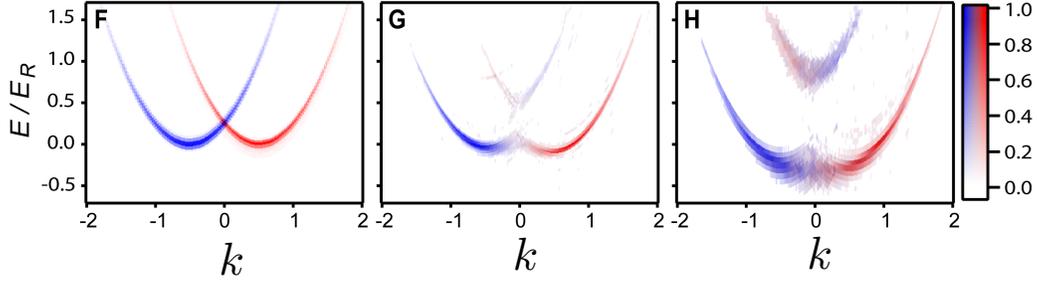


Figure 1: Spectre d'énergie pour des particules avec couplage spin-orbite (depuis L. W. Cheuk *et al.*, Phys. Rev. Lett. 109, 095302 (2012)).

### 3.3

Comme la rotation de spin est dépendante de la position, elle ne commute pas avec l'opérateur impulsion. Considérons la transformation canonique de l'opérateur impulsion

$$\hat{p}(q) = e^{-iq\hat{x}} \hat{p} e^{iq\hat{x}} \quad (23)$$

où  $q$  est une constante. Démontrer qu'une telle transformation correspond à une translation de l'impulsion

$$\hat{p}(q) = \hat{p} + \hbar q \quad (24)$$

(Suggestion: calculer  $d\hat{p}(q)/dq$ ).

### 3.4

Reconnaitre que

$$\hat{R}_z(\phi(\hat{x})) = e^{i\hat{q}\hat{x}} \quad (25)$$

où  $\hat{q} = 2k_L\hat{S}^z/\hbar$ . Le paramètre de translation de l'impulsion est maintenant devenu un opérateur, mais ce changement est innocent puisque les opérateurs de spin commutent avec les opérateurs  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$ .

En conclure que le Hamiltonien transformé prend la forme:

$$\hat{\mathcal{H}}' = \hat{\mathcal{R}}_z^\dagger(\phi) \hat{\mathcal{H}} \hat{\mathcal{R}}_z(\phi) = \frac{1}{2m} \left( \hat{p} + 2k_L\hat{S}^z \right)^2 + \delta S^z + \Omega \hat{S}^x \quad (26)$$

## Partie II. Relation de dispersion

### 3.5

Nous allons maintenant chercher un vecteur propre de l'Hamiltonien de l'Eq. (26) sous la forme

$$e^{ikx} \otimes |\sigma\rangle \quad (27)$$

où  $|\sigma\rangle$  est l'état de spin de la particule. Soit  $\hat{\mathcal{H}}'(e^{ikx} \otimes |\sigma\rangle) = E(e^{ikx} \otimes |\sigma\rangle)$ . Montrer que  $|\sigma\rangle$  satisfait l'équation aux valeurs propres

$$\left[ \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_R + (\alpha\hbar k + \delta) \hat{S}^z + \Omega \hat{S}^x \right] |\sigma\rangle = E|\sigma\rangle \quad (28)$$

où  $\alpha = 2k_L/m$  et  $E_R = (\hbar k_L)^2/(2m)$ . Cette équation est la même que celle d'un spin 1/2 dans un champ magnétique dépendant de l'impulsion.

Calculer les deux valeurs propres  $E = E_k^{(\pm)}$  associées à un vecteur d'onde  $k$  donné.

(Ces deux valeurs propres définissent deux branches formant ce qu'on appelle une *relation de dispersion* énergie-impulsion).

### 3.6

On considère le cas  $\Omega = \delta = 0$ . Montrer que les deux valeurs propres  $E_k^{(\pm)}$  en fonction de  $k$  décrivent deux paraboles décalées le long de l'abscisse. Y-a-t-il une valeur propre dégénérée pour l'énergie? Associer à chaque parabole l'état de spin correct. Que se passe-t-il si  $\delta > 0$ ?

### 3.7

On considère maintenant (et jusqu' la fin de l'exercice)  $\delta = 0$  et  $\Omega > 0$ . Calculer les valeurs propres  $E_{k=0}^{(\pm)}$ . Discuter l'évolution de la dégénérescence par rapport au cas  $\Omega = 0$ . Quel sont les états de spin correspondants?

Dessiner qualitativement les valeurs propres  $E_k^{(\pm)}$  en fonction de  $k$ . Interprétez maintenant la Fig. 1. Quel paramètre du Hamiltonien change en allant de la figure de gauche à la figure de droite?

### 3.8

Comment évolue l'état de spin associé aux énergies  $E_k^{(\pm)}$  de  $k = 0$  à  $k = \pm\infty$ ? Imaginez que la particule soumise à une force soit accélérée d'une impulsion  $\hbar k = 0$  à une impulsion  $\hbar k \gg \hbar k_L$ , de sorte qu'elle reste tout le temps sur la branche inférieure  $E_k^{(-)}$ . Comment évolue le spin dans ce processus?

### 3.9

Imaginons maintenant un paquet d'onde construit à l'aide d'une combinaison linéaire d'ondes planes  $e^{ikx} \otimes |\sigma_k\rangle$

$$\Psi(x, \sigma) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\psi}(k) e^{ikx} \otimes |\sigma_k\rangle . \quad (29)$$

La nouveauté par rapport à ce que vous avez vu en cours est l'apparition d'un état de spin, qui est strictement lié à la valeur de  $k$ ,  $|\sigma\rangle = |\sigma_k\rangle$ .

On choisit  $|\sigma_k\rangle$  comme l'état de spin correspondant à la branche inférieure de la relation de dispersion. Imaginez que  $\tilde{\psi}(k)$  soit piqué autour d'un  $k_0$  tel que  $0 < k_0 < k_L$ , et prenez comme avant  $\delta = 0$ ,  $\Omega > 0$  dans le Hamiltonien.

Dans son évolution dictée par le Hamiltonien Eq. (26), le paquet d'onde se déplace-t-il vers la gauche ou vers la droite? Quelle est la vitesse de groupe?