Algèbre linéaire en dimension finie.

1 Espaces vectoriels, premières définitions

Définition. Un ensemble E est appelé *espace vectoriel réel* s'il est muni d'une loi d'addition $\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & u+v \end{array}$ et d'une loi de multiplication scalaire $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times E & \to & E \\ (\lambda,u) & \mapsto & \lambda u \end{array}$ qui vérifient les règles usuelles de calcul : existence d'un 0 pour l'addition, commutativité et associativité de l'addition, distributivité par rapport à la multiplication, etc.

Un *sous-espace vectoriel* de E est un sous-ensemble de E laissé stable par l'addition et la multiplication par un scalaire. Il contient nécessairement le 0 de E.

Exemples :

Définition. Une famille $(x_1, \cdots, x_n)$ de vecteurs de E est dite *liée* s'il existe une famille de n réels $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ non tous nuls tels que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$.

Une famille $(x_1, \cdots, x_n)$ de vecteurs de E est dite *linéairement indépendante* ou *libre* si elle n'est pas liée : $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Une famille $(x_1, \cdots, x_n)$ de vecteurs de E est dite *génératrice* si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des x_i, c'est-à-dire si pour tout x dans E, il existe une famille de n réels $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ tels que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = x$.

Une famille de vecteurs libre et génératrice est appelée *base* de l'espace vectoriel E.

Les bases d'un espace vectoriel ont toutes le même cardinal, qu'on appelle *dimension* de E.

Exemples :

Remarque : si E est de dimension n, une famille génératrice de E est toujours de cardinal supérieur à n et une famille libre toujours de cardinal inférieur à n. En déduire qu'une famille de n vecteurs est une base si et seulement si elle est génératrice ou libre.

2 Applications linéaires et matrices en dimension finie

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

Définition. Une fonction $f : E \to F$ est appelée *application linéaire* si elle vérifie $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ et $f(u+v) = f(u) + f(v)$ pour tous λ réel et u, v vecteurs de E. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E.

On appelle *noyau* de f et on note $Ker(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E | f(x) = 0\}$ l'ensemble des vecteurs de E pour lesquels f s'annule et on appelle *image* de f l'ensemble des images par f des vecteurs de E, noté $Im(f) = \{f(x), x \in E\} \subset F$.

Une application linéaire est dite *injective* si $f(u) = f(v)$ implique $u = v$. Une application est injective si et seulement si son noyau est réduit à l'ensemble $\{0\}$.

Une application linéaire est dite *surjective* si tout vecteur de l'espace vectoriel d'arrivée est atteint par F, c'est-à-dire si $Im(f) = F$.

Une application linéaire est dite *bijective* si elle est à la fois injective et surjective. Dans ce cas E et F ont nécessairement la même dimension. On dit que l'application est un *isomorphisme* et que E et F sont *isomorphes*. Il existe alors une application linéaire inverse notée $f^{-1} : F \to E$ telle que $f \circ f^{-1}$ est l'identité de F et $f^{-1} \circ f$ est l'identité de E.

Proposition. *L'image par une application linéaire injective d'une famille de vecteurs libre est libre. L'image par une application linéaire surjective d'une famille génératrice est une famille génératrice. Si E et F ont même dimension, f surjective $\iff$ f injective $\iff$ f bijective.*

On fixe E (par exemple $\mathbb{R}^n$) et une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E (par exemple la base canonique). Il existe une correspondance naturelle entre l'ensemble $\mathcal{L}(E)$ des applications linéaires de E dans E et l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n à coefficients réels obtenue de la manière suivante :

Définition. On appelle *matrice de l'application linéaire f dans la base* $(e_1, \cdots, e_n)$ et on note $Mat_{e_1,\cdots,e_n}(f)$ la matrice qui a pour coefficients $(\lambda_{ij})_{i,j\in[1,n]}$, où les λ_{ij} sont uniquement déterminés par

$$\forall j \in [1,n], f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_i.$$

Autrement dit, la j-ième colonne de la matrice contient l'écriture de $f(e_j)$ dans la base des e_i.

Proposition. *Si f et g sont des applications linéaires de E dans E, alors la matrice de l'application composée $f \circ g$ est le produit matriciel des matrices de f et de g :*

$$Mat_{e_1,\cdots,e_n}(f \circ g) = Mat_{e_1,\cdots,e_n}(f) Mat_{e_1,\cdots,e_n}(g).$$

En particulier f est bijective si et seulement si sa matrice associée est inversible, et ce pour n'importe quelle base de E.

Exercice : écrire la matrice de l'application dérivée $D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array}$ pour la base $(1, X, \cdots, X^n)$. Cette application est-elle injective ?

Proposition. *Si $(e_1, \cdots, e_n)$ et $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ sont deux bases de E, les matrices $Mat_{e_1,\cdots,e_n}(f)$ et $Mat_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n}(f)$ sont dites semblables : il existe une matrice inversible P (décrivant le changement de base) telle que $Mat_{e_1,\cdots,e_n}(f) = P Mat_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n}(f) P^{-1}$.*

3 Matrices inversibles et système d'équations linéaires

On fixe une matrice carrée $A = (a_{ij})_{i,j\in[1,n]}$ et on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On a :

$$AX = Y \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n. \end{cases}$$

Le système de droite est appelé *système d'équations linéaires* : en général on connaît les a_{ij} et les y_i et on cherche à déterminer les inconnues x_i.

Proposition. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La matrice A est inversible.*
2. *Il existe une matrice carrée A^{-1} de taille n telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.*
3. *L'équation $AX = Y$ admet pour tout vecteur Y une unique solution X.*
4. *L'équation $AX = Y$ admet pour tout vecteur Y au moins une solution X.*
5. *L'équation $AX = 0$ admet comme seule solution $X = 0$.*
6. *La matrice A n'admet pas 0 comme valeur propre.*
7. *Le déterminant de A est non nul.*

Quelques éléments de preuve :

En pratique : méthode du pivot de Gauss, résolution de Cramer...

Remarque : si A n'est pas inversible, l'espace des solutions X de $AX = Y$ peut avoir différentes formes. Résoudre $AX = Y$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4 Déterminants

Dans le cadre de ce cours on voit le déterminant comme outil pour décider de l'inversibilité d'une matrice carrée. On présente ici les briques élémentaires pour le calculer.

Définition. Le *déterminant* est une application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\det A = 0 \iff A \text{ est non inversible.}$$

Proposition (Règles de calcul).

- $\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det(BA)$.
- *Si A est une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure, ou encore diagonale), alors $\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$ est le produit des termes diagonaux.*
- *Si A_{ij} est la matrice de taille $n-1$ obtenue en ôtant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A, alors la règle de* développement par rapport à la i-ième ligne *s'écrit :*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

et la règle de développement par rapport à la j-ième colonne *s'écrit :*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Attention ! $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ en général !

Quelques exemples :

Conséquences.

- Si A et B sont semblables, *i.e.* s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$, alors $\det A = \det B$. Par conséquent si A est diagonalisable, son déterminant est égal au produit de ses valeurs propres, si besoin répétées avec leur multiplicité.
- En dimension 2 et 3, les règles de développement impliquent l'expression du déterminant :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc,$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - dbi - hfa.$$

Application : la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

5 Eléments de réduction

Définition. Soit A une matrice carrée.

On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une *valeur propre* de A s'il existe un vecteur X non nul tel que $AX = \lambda X$. Un tel vecteur non nul est appelé *vecteur propre* associé à la valeur propre λ.

On appelle *espace propre* associé à la valeur propre λ l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et on appelle sa dimension *multiplicité* de la valeur propre λ.

On dit que A est *diagonalisable* s'il existe une base constituée de vecteurs propres de A. De manière équivalente, A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale, dont les termes diagonaux sont alors les valeurs propres de A, présentées chacune au nombre de leur multiplicité.

Proposition. *Une matrice de taille n est diagonalisable si et seulement si la somme des multiplicités de ses valeurs propres vaut n, donc en particulier s'il existe n valeurs propres distinctes.*

Le déterminant s'avère utile dans la détermination des valeurs propres :

Proposition. *Un réel λ est valeur propre de A si et seulement si* $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Définition. On appelle *polynôme caractéristique* associé à une matrice A et on note χ_A la fonction $\chi_A(x) = \det(A - xI_n)$. Comme son nom l'indique, c'est un polynôme, de degré la taille de A, et ses racines sont exactement les valeurs propres de la matrice A.

Exercice : Calculer le polynôme caractéristique de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Diagonalisable ?

Définition. La *trace* d'une matrice est la somme de ses éléments diagonaux : $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Proposition. *La trace vérifie la propriété $tr(AB) = tr(BA)$. En particulier deux matrices semblables ont même trace.*

Proposition. *Si une matrice est diagonalisable, sa trace est égale à la somme de ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité et son déterminant est égal au produit de ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité.*

Comme la trace et le déterminant sont aisément calculables pour des petites matrices, ce résultat permet de vérifier rapidement la cohérence des valeurs propres obtenues.
Exercice : Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes. Lesquelles sont inversibles ?

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6 Produit scalaire et matrices symétriques

Le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$ est noté $\langle \cdot,\cdot \rangle$. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a :

$$\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \ {}^tYX = \ {}^tXY$$

où ${}^tX$ désigne le vecteur ligne $(x_1, \cdots, x_n)$ et où ${}^tXY$ désigne la multiplication vectorielle usuelle.

Définition. Si $A = (a_{ij})_{i,j\in[1,n]}$ est une matrice, sa *transposée* ${}^tA$ est la matrice $(a_{ji})_{i,j\in[1,n]}$.

Une matrice A est dite *symétrique* si elle est égale à sa transposée. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Une matrice A est dite *antisymétrique* si elle est l'opposée de sa transposée. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition. *Si A est symétrique, alors pour tous X, Y dans $\mathbb{R}^n$ $\langle AX, Y \rangle = \langle X, AY \rangle$.*

Preuve en notation vectorielle :

Théorème. *Une matrice symétrique réelle est toujours diagonalisable. De plus il existe une base (e_i) de vecteurs propres qui est* orthonormale, *c'est-à-dire qui vérifie $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ pour tout i et $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$.*

Vérifier que des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont orthogonaux :

Application : En observant que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice non inversible $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer sans calcul les valeurs propres de la matrice et leur multiplicité.

Définition. Une matrice symétrique est dite *positive* si ses valeurs propres sont toutes positives. On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de taille n.

Une matrice symétrique est dite *définie positive* si ses valeurs propres sont toutes strictement positives. On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de taille n.

Une matrice symétrique est dite *négative* (resp. *définie négative*) si son opposée est positive (resp. définie positive). On note $S_n^-(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{--}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques négatives (resp. définies négatives) de taille n.

Exercice : Déterminer l'éventuelle positivité ou négativité des matrices symétriques suivantes.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On observera qu'en dimension 2, une matrice symétrique de déterminant strictement positif est soit définie positive, soit définie négative, et que son signe est donné par le signe de sa trace.