Calcul différentiel.

1 Différentielle et jacobienne

Définition. Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimension finie munis de normes. Une fonction $f : E \to F$ est dite *différentiable* en un point a s'il existe une application linéaire $d_a f : E \to F$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \circ(\|h\|) \text{ quand } \|h\| \to 0.$$

Cette application linéaire est unique et appelée *différentielle de f en a*. Elle ne dépend pas du choix de la norme.

Remarques.
- Si f est une application linéaire, alors en tout point a $d_a f = f$.
- Si $E = \mathbb{R}^d$ et $F = \mathbb{R}$ et si f est $\mathcal{C}^1$ en a, alors $d_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$. (formule de Taylor)

Exemple : déterminer la différentielle de l'application $\begin{array}{cccc} f: & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & A & \mapsto & A^2 \end{array}$.

La notion de différentielle est utile si l'on ne veut pas préciser la base avec laquelle on travaille.

Définition. Si la fonction $\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}^k \\ (x_1, \cdots, x_d) = x & \mapsto & f(x) = (f_1(x_1, \cdots, x_d), \cdots, f_k(x_1, \cdots, x_d)) \end{array}$ est différentiable en un point a, on appelle *jacobienne de f en a* et on note $Jf(a)$ la matrice des dérivées partielles de f au point a ordonnées comme suit :

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(a) \\ \vdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_d}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\nabla f_1(a) \\ \vdots \\ {}^t\nabla f_k(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}).$$

Cette matrice à k lignes et d colonnes est la matrice de $d_a f$ écrite dans les bases canoniques.

Exemples : écrire les jacobiennes de $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1 x_2, 3x_1)$, de $g(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$, de $h(t) = (t^3, \sin(t))$ et de $k(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_3, x_2 - x_1)$.

2 Formule de différentiation des fonctions composées

Proposition. *Soient $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ et $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ telles que f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$. Alors l'application composée $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ est différentiable en a, et sa différentielle et sa jacobienne sont données par :*

$$d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f, \quad J(g \circ f)(a) = Jg(f(a))Jf(a).$$

Exercice : pont aux ânes. Dériver $u(x) = f(x, -x)$ et $g(x, y) = f(y, x)$.

En pratique : si $h(x_1, \cdots, x_d) = g(f_1(x_1, \cdots, x_d), \cdots, f_k(x_1, \cdots, x_d))$,

Application : différentielle de l'inverse. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est inversible, de classe $\mathcal{C}^1$ et que son inverse est de classe $\mathcal{C}^1$, montrer que les jacobiennes de f et de f^{-1} sont inversibles en tout point. Ecrire le lien entre ces jacobiennes et vérifier le résultat en dimension 1.

Le *théorème d'inversion locale* qui suit donne une sorte de réciproque à cette application.

Théorème. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $Jf(a)$ est inversible, alors il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ tel que $f : U \to f(U)$ est bijective et sa bijection réciproque est de classe $\mathcal{C}^1$.*

En dimension 1, $f' \neq 0 \iff f$ localement strictement monotone $\iff f$ localement bijective.

Conséquences sur les courbes de niveaux. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit par $v(t) = f(\gamma(t))$ la valeur de la fonction f le long du chemin paramétré par t, et on note $\dot\gamma(t) = J\gamma(t)$. Vérifier que $v'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle$:

Définition. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et x tel que $\nabla f(x) \neq 0$. On appelle *espace tangent en x à la courbe de niveau $f = f(x)$* l'ensemble

$$T_x f = \left\{ v \in \mathbb{R}^d \middle| \exists \text{ chemin } \mathcal{C}^1 \gamma :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}^d \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} \gamma(0) = x \\ \dot\gamma(0) = v \\ f(\gamma(t)) = f(x) \ \ \forall t \in]-\delta, \delta[\end{array} \right. \right\}.$$

L'espace tangent est une approximation locale et linéaire de la courbe de niveau.

Proposition. *Si $\nabla f(x) \neq 0$, $T_x f = \left\{ v \in \mathbb{R}^d \middle| \langle v, \nabla f(x) \rangle = 0 \right\}$. En particulier, c'est un espace vectoriel de dimension $d - 1$.*

Remarque. Attention, si $\nabla f(x) = 0$, le niveau pour la valeur $f(x)$ peut présenter des singularités. On pourra regarder $f(x, y) = x^2 - y^2$ ou $f(x, y) = x^2 + y^2$.

3 Théorème des fonctions implicites

Théorème. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ alors il existe un voisinage U de x_0, un voisinage $V \subset U \times \mathbb{R}$ de (x_0, y_0) et une application $\mathcal{C}^1$ $\phi : U \to \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall (x, y) \in V, f(x, y) = 0 \iff y = \phi(x).$$

De plus, $\phi'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$.

Retrouver sans effort la valeur de $\phi'(x_0)$ et par conséquent l'hypothèse à vérifier :

Interprétation graphique :

Exemple : $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

En dimension plus grande :

Théorème. *Soit $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$ est tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et* $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x_0, y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x_0, y_0) \end{vmatrix} \neq 0$ *alors il existe un voisinage U de x_0, un voisinage $V \subset U \times \mathbb{R}^m$ de (x_0, y_0) et une application $\mathcal{C}^1$ $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ tels que*

$$\forall (x, y) \in V, f(x, y) = 0 \iff y = \phi(x).$$

Exercice : appliquer le théorème d'inversion locale à la fonction $\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathbb{R}^{n+m} & \to & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ & (x, y) & \mapsto & (x, f(x, y)) \end{array}$ pour démontrer le théorème des fonctions implicites.

Exercices

1. Montrer que la relation vérifiée permet de définir implicitement y en fonction de x au voisinage du point (x_0, y_0) indiqué, et écrire le développement limité à l'ordre 1 autour de x_0 de la fonction $x \mapsto y(x)$:

   (a) $x^4 + y^3 - 2x^2y - 1 = 0$ au voisinage de $(0, 1)$.

   (b) $\sin y + y + e^x = 1$ au voisinage de $(0, 0)$.

   (c) $y^3 + (x^2 + 1)y + x^2 = 0$ au voisinage de $(0, 0)$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$. Montrer qu'il existe un intervalle I contenant x_0 et une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = (0, 0)$ pour tout $x \in I$.

3. On considère le système d'équations :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

   Montrer que, pour x proche de 0, il existe des fonctions strictement positives $y(x)$ et $z(x)$ telles que $(x, y(x), z(x))$ soit solution du système. On déterminera $y'(x)$ en fonction de x et y, ainsi que $z'(x)$ en fonction de x et z.

4. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \neq -1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \neq 0$, montrer que la relation $f(f(x, y), y) = 0$ définit implicitement y en fonction de x au voisinage du point $(0, 0)$.

5. *Le folium de Descartes.* On considère la courbe définie par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 9xy = 0\}$, appelée *folium de Descartes.*

   (a) Déterminer les pentes du folium aux points $(4, 2)$ et $(2, 4)$.

   (b) À quel point autre que l'origine le folium présente-t-il une tangente horizontale ? ou verticale ? Déterminer les coordonnées de ces points.