Ordre et manipulations

1. Donner la définition d'une distribution sur $\mathbb{R}^d$ et de son ordre.

2. Montrer que si deux fonctions de L^1_{loc} définissent la même distribution, alors elles sont égales presque partout.

3. (a) Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction de Heaviside $H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases}$ et δ_0 la distribution de Dirac en 0, définie par $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$ pour toute fonction test ϕ. Montrer que $H' = \delta_0$ au sens des distributions.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, donner un exemple de distribution d'ordre n et donner une distribution d'ordre infini.
   (c) Pour $\theta \in \mathbb{C}^\infty$, calculer $\theta\delta_0'$.

4. Étudier la convergence au sens des distributions des suites suivantes, on précisera l'ordre des distributions de la suite ainsi que celui de la limite lorsqu'elle existe :

   (a) $f_n(x) = n^d f(nx)$ avec $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$;
   (b) $T_n = (-1)^n \delta_{1/n}$;
   (c) $T_n = \frac{n}{2}(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})$;
   (d) $f_n(x) = \cos(nx)$;
   (e) $f_n(x) = n^p \cos(nx)$ avec $p > 0$;
   (f) $f_n(x) = |x|^{\frac{1}{n}-1} - 2n\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Deux exemples

5. On étudie deux distributions : la valeur principale et la partie finie.

   (a) On définit la valeur principale de $1/x$ par : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

   $$\langle \mathrm{p.\,v.}(1/x), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

   i. Montrer que $\mathrm{p.\,v.}(1/x)$ définit bien une distribution et préciser son ordre.
   ii. Montrer que $x\ \mathrm{p.\,v.}(1/x) = 1$ au sens des distributions.
   iii. Montrer que $x \mapsto \ln(|x|)$ définit une distribution dont la dérivée est $\mathrm{p.\,v.}(1/x)$.

   (b) On définit la partie finie de $1/|x|$ par : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

   $$\langle \mathrm{fp}(1/|x|), \varphi \rangle = \int_{-M}^{M} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|} \mathrm{d}x + 2\varphi(0) \ln(M),$$

   où $M > 0$ vérifie $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-M, M]$.

   i. Montrer que $\mathrm{fp}(1/|x|)$ définit bien une distribution (en particulier ne dépend pas de M tant que $[-M, M]$ contient le support de φ) et préciser son ordre.
   ii. Montrer que $x\ \mathrm{fp}(1/|x|) = \mathrm{sgn}(x)$ au sens des distributions.
   iii. Montrer que $x \mapsto \mathrm{sgn}(x) \ln(|x|)$ définit une distribution dont la dérivée est $\mathrm{fp}(1/x)$.

Résolutions d'EDO au sens des distributions

6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

   (a) Résoudre $T' = 0$ dans $\mathcal{D}'(I)$.
   (b) Soit $f, g \in C^\infty(I)$, montrer que toute solution T de $T' + fT = g$ dans $\mathcal{D}'(I)$ est une fonction lisse.
   (c) Pour $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, résoudre $T' + fT = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   (d) Résoudre $T'' - T' - 2T = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

7. Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\theta(0) = 1$.

   (a) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que

   $$\varphi(x) - \varphi(0)\theta(x) = x\psi(x).$$

   (b) Résoudre $xT = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   (c) Résoudre $xT = 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
   (d) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, résoudre $x^n T = 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

8. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ les équations suivantes :

   (a) $xT = \mathrm{sgn}(x)$,

   (b) $xT = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$,

   (c) $(x-1)T = \delta_0$,

   (d) $(x-a)(x-b)T = 1$ avec $a \neq b$.

9. *Formule des sauts.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^*$, on dit que f admet un saut en 0 si f se prolonge par continuité à droite et à gauche de 0 par des valeurs finies. On note $[[f(0)]] = f(0^+) - f(0^-)$ la hauteur du saut de f en 0. On note $\{f'\}$ la dérivée de la partie régulière de f, c'est-à-dire
$$\{f'\}(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si } f \text{ est dérivable en } x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   (a) Montrer qu'au sens des distributions :
$$f' = \{f'\} + [[f(0)]]\delta_0.$$
   (b) Soit (x_n) une suite indexée par $\mathbb{Z}$ strictement croissante telle que
$$\lim_{n\to-\infty} x_n = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$
   Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 admettant des sauts sur chaque x_n. Montrer qu'au sens des distributions
$$f' = \{f'\} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} [[f(x_n)]]\delta_{x_n}.$$
   (c) Soit $P = \partial^2 + a\partial + b$ un opérateur différentiel avec $a, b \in \mathbb{R}$.

      i. Soit f et g deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on définit $h = f\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} + g\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}$. Calculer $P.h$ au sens des distributions.

      ii. En déduire une solution particulière de l'équation $T'' + aT' + b = \delta_0$.

Une injection de Sobolev en dimension 1

10. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $p \in [1, +\infty]$. Soit $f \in W^{1,p}(I) = \{f \in L^p, f' \in L^p\}$.

   (a) Soit $a \in I$, montrer que la fonction T, donnée par
$$T(x) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,$$
   est bien définie, continue et dérivable presque partout. *On pourra utilise le théorème de différentiation de Lebesgue : si $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,*
$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\mathrm{d}y \quad \overset{r\to 0}{\longrightarrow} \quad f(x).$$
   (b) Montrer que $T' = f'$ presque partout et au sens des distributions.

   (c) En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = c + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t.$$
   En particulier, f admet un représentant continu et dérivable presque partout.

   (d) Si $1 < p < +\infty$, montrer que f est hölderienne. Pour quel $\alpha > 0$ a-t-on l'inclusion $H^1(I) \subset C^{0,\alpha}(I)$?

   (e) Si $p = +\infty$, montrer que f est lipschitzienne.

   (f) Montrer que $W^{1,p}(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $g \in W^{1,p}(I)$, on a $g \in L^\infty(I)$ et
$$||g||_{L^\infty} \leqslant c||g||_{W^{1,p}}.$$
   On dit que $W^{1,p}(I)$ s'injecte continûment dans $L^\infty(I)$. On pourra commencer par le cas $I = \mathbb{R}$ et $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, et considérer la fonction $G \circ g$ avec $G : t \mapsto t|t|^{p-1}$.

   (g) On suppose I borné.

      i. Montrer que $W^{1,p}(I)$ est stable par produit.

      ii. Montrer que l'injection $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C\left(\overline{I}\right)$ est compacte, c'est-à-dire que tout élément de $W^{1,p}(I)$ est dans $C\left(\overline{I}\right)$ et que de tout suite borné de $(W^{1,p}(I), ||.||_{W^{1,p}})$, on peut extraire une suite convergent uniformément sur $\overline{I}$ vers une limite dans $C\left(\overline{I}\right)$.

   (h) On suppose I non borné, montrer que
$$\lim_{\substack{|x|\to+\infty \\ x\in I}} f(x) = 0.$$

Distributions tempérées et transformée de Fourier

11. Rappeler la définition de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et d'une distribution tempérée. Montrer que l'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est stable par dérivation et par multiplication par les fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ à croissance lente, *i.e.* telles que
$$\forall \beta \in \mathbb{N}^d, \qquad \exists C_\beta, m_\beta, \quad |D^\beta f(x)| \leq C_\beta (1+|x|)^{m_\beta}.$$

12. (a) Soient $p \in [1,+\infty]$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Montrer que f définit une distribution tempérée.
    (b) Soient $P \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_d]$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $|f| \leqslant |P|$. Montrer que f définit une distribution tempérée.
    (c) Montrer que $x \mapsto \exp(x)$ ne définit pas une distribution tempérée.

13. Montrer que la transformée de Fourier conserve $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.

14. Montrer que les distributions suivantes sont tempérées et calculer leur transformée de Fourier avec la convention : pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$,
$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}x.$$
    (a) δ_0 sur $\mathbb{R}^d$,
    (b) $e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma}}$ sur $\mathbb{R}$ avec $\sigma > 0$,
    (c) H (Heaviside),
    (d) $\mathrm{p.\,v.}(1/x)$,
    (e) $\delta_0^{[n]}$ sur $\mathbb{R}$,
    (f) $|x|$ sur $\mathbb{R}$,

15. Soient $k > 0$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tels que $T^{[4]} + kT \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $j \in [\![0,4]\!]$, $T^{[j]} \in L^2(\mathbb{R})$.

16. Soit $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Montrer que si $\Delta U = 0$ alors U est un polynôme.

Supports et convolution

17. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.
    (a) Rappeler la définition du support de T.
    (b) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, montrer que si $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$ alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$. La réciproque est-elle vraie ? Est-ce que si ϕ s'annule sur le support de T, $\langle T, \varphi \rangle = 0$?
    (c) On suppose que T est à support compact et on considère $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\psi = 1$ sur un voisinage de $\operatorname{supp} T$. Montrer que $\psi T = T$.

18. Montrer que les distributions dont le support est un singleton peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des dérivées de la distribution de Dirac en ce point.

19. (a) Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, montrer que si $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi$ est compact alors on peut définir $\langle T, \varphi \rangle$.
    (b) Soient $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on suppose T et S vérifient la condition suivante : pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$,
$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \;\middle|\; x \in \operatorname{supp} T,\ y \in \operatorname{supp} S,\ x+y \in K \right\}$$
    est compact. Montrer que dans ce cas, $T * S$ et $S * T$ sont bien définies.

20. La convolution est-elle associative pour le triplet 1, δ_0' et H, où H est la fonction de Heaviside définie dans l'exercice 3 ? Donner une condition suffisante sur les supports pour que la convolution soit associative.

21. Calculer les convolutions suivantes :
    (a) $\delta_a * \delta_b$ sur $\mathbb{R}^d$,
    (b) $T * \delta_a$ avec $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$,
    (c) $H * H$ (Heaviside),
    (d) $(x^p \delta_0^{[q]}) * (x^m \delta_0^{[n]})$,
    (e) $\delta_0^{[k]} * (x^m H)$,
    (f) $(x^p H) * (x^q H)$,
    (g) $\mathbb{1}_{[a,b]} * \mathbb{1}_{[c,d]}$,
    (h) $\mathbb{1}_{[0,1]} * (xH)$,
    (i) $\delta_{S(0,r)} * |x|^2$ sur $\mathbb{R}^3$.

22. *Densité des fonctions lisses dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Soit (ρ_n) une suite régularisante définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \rho_n(x) = n^d \rho(-nx),$$
où $\rho \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^d, [0,1])$ est à support dans la boule unité. Montrer que pour toute distribution T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $T \star \rho_n$ converge vers T au sens des distributions.

23. On note $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} T \subset \mathbb{R}^+\}$.

   (a) Montrer que la convolution de deux éléments de $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ est bien définie et donne un élément de $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. *On pourra loucher sur l'exercice 17. Pour la suite de l'exercice, on admet que la convolution est associative et commutative dans* $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. Quel est le neutre de la convolution dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$?

   (b) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $T, S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, on a $(e^{ax}T) * (e^{ax}S) = e^{ax}(T * S)$.

   (c) Pour $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, on note T^{-1} l'inverse de T dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ pour la convolution lorsqu'il existe. Montrer que T^{-1} est effectivement unique et calculer $(\delta_0')^{-1}$, $(H)^{-1}$ et $(\delta_0' - \lambda\delta_0)^{-1}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (d) Soit P un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$, calculer $[P(\partial).\delta_0]^{-1}$.

   (e) Résoudre dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ le système suivant

$$\begin{cases} \delta_0'' * X + \delta_0' * Y & = \delta \\ \delta_0' * X + \delta_0'' * Y & = 0. \end{cases}$$

24. On étudie le comportement de la convergence de distributions avec le produit de convolution.

   (a) Soient $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, $V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et (V_n) une suite de distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Montrer que si $V_n \to V$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ alors $V_n * T \to V * T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

   (b) Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $V \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et (V_n) une suite de distribution de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Montrer que si $V_n \to V$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ alors $V_n * T \to V * T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

   (c) Montrer qu'il existe deux suites de distributions T_n et V_n convergent vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et telles que $T_n * V_n \to \delta_0$.