EDOs linéaires en dimension/ordre 2

1. On considère le système différentiel $\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & y(t)+e^{-t}, \\ y'(t) & = & 2x(t)-y(t). \end{array}\right.$ Tracer le portrait de phase du système homogène associé. Déterminer de deux manières différentes la solution maximale du système vérifiant $(x(0), y(0)) = (1, 0)$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Résoudre l'équation différentielle $v''(t) - v(t) = f(t)$.

3. Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère l'équation différentielle d'ordre 2

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0. \tag{E}$$

   (a) Décrire le domaine d'une solution maximale de (E). Montrer que les zéros d'une solution non identiquement nulle sont isolés.

   (b) On note $X'(t) = A(t)X(t)$ le système différentiel d'ordre 1 associée à (E).

      i. Rappeler la définition de la résolvante R_s^t du système et ses principales propriétés.

      ii. Déterminer $\det(R_s^t)$ à l'aide de la *formule de Liouville.*

      iii. Montrer que R_0^t possède une valeur propre de module inférieur à 1.

   On suppose désormais que q est 1-périodique.

   (c) Relier R_1^{t+1} et R_0^t pour $t \in \mathbb{R}$.

   (d) Si 1 est valeur propre de R_0^1, montrer que (E) admet une solution 1-périodique non nulle.

   (e) Montrer que (E) admet une solution bornée dans le futur.

EDOs autonomes, portraits de phase

4. *Equation logistique*

   (a) Décrire le comportement asymptotique de $N' = rN$ selon le signe de r.

   (b) On choisit désormais $K > 0$. Résoudre (?) et discuter qualitativement le comportement de N vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{l} N' = rN(K-N), \\ N(0) = N_0 > 0. \end{array}\right.$$

   (c) On rajoute un effet Allee : décrire qualitativement le comportement de N vérifiant, pour $\rho \in [0, K[$,

$$\left\{\begin{array}{l} N' = rN(K-N)(N-\rho), \\ N(0) = N_0 > 0. \end{array}\right.$$

5. *Lotka Volterra (lapins et renards).* On s'intéresse au système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t), \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t), \end{array}\right.$$

   où a, b, c, d sont des constantes strictement positives.

   (a) Qui sont les lapins, qui sont les renards ?

   (b) Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il ? Montrer qu'une solution maximale issue d'un couple de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ reste dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

   (c) Montrer que l'intégrale première $\mathcal{H}(x, y) = dx - c\log x + by - a\log y$ est constante au cours du temps.

   (d) Montrer que la solution $(x(t), y(t))$ est bornée. Que peut-on en déduire ?

   (e) Déterminer une solution (non nulle) constante au cours du temps. On l'appelle point d'équilibre.

   (f) Linéariser autour du point d'équilibre et en déduire l'allure des solutions au voisinage de ce point.

   (g) Déterminer les points critiques de $\mathcal{H}$, décrire l'allure de ses niveaux dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$, et faire le lien avec ce qui précède.

EDOs non linéaires

6. Pour chacune des EDOs suivantes, dire si le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et si les solutions maximales sont globales en temps positifs et/ou en temps négatifs.

   (a) $x' = \sin(tx)$
   (b) $y' = \mathrm{sh}(y)$
   (c) $z' = z^3$
   (d) $u' = -u^3$
   (e) $v' = \frac{1}{1+v}$
   (f) $w' = |w|^{\frac{3}{4}}$

7. *Explosion ou solutions globales ?*

   (a) Résoudre $x' = x^\beta$ avec $x(0) = x_0 > 0$. Discuter en fonction de la valeur de $\beta \in \mathbb{R}$ si la solution maximale est globale ou explose en temps fini.

   (b) Même chose avec $x' = x(\ln x)^\beta$. (On pourra utiliser le changement de fonction inconnue $y = \ln x$).

8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on considère l'EDO $x' = f(t,x)$.

   (a) Supposons que $xf(t,x) < 0$ pour tout $x \neq 0$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que les solutions maximales de l'équation sont globales en temps positifs et admettent une asymptote horizontale.

   (b) Supposons que f est à variables séparées, *i.e.* $f(t,x) = h(t)g(x)$ où h et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et notons x_1 et x_2 deux zéros successifs de g. Montrer que toute solution maximale issue de $]x_1, x_2[$ est globale.

Liapounov 101

9. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction de classe C^1. On suppose que l'EDO

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{1}$$

admet une fonction de Liapounov $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^1, c'est-à-dire une fonction qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0.$$

   (a) Soit (x, I) une solution de l'équation (1). Vérifier que la fonction $t \mapsto V(x(t))$ décroît sur I.

   (b) Soit $x^\star \in \mathbb{R}^d$ un point d'équilibre de l'équation (1) - autrement dit un zéro de f. On suppose de plus que V atteint un minimum local strict en $x^\star$, c'est-à-dire qu'il existe $r_1 > 0$ tel que $V(x^\star) < V(x)$ pour tout x différent de $x^\star$ dans $B(x^\star, r_1)$. Pour tout $0 < r < r_1$, on note $\alpha_r = \min\{V(x), |x - x^\star| = r\}$.

      i. Soit $0 < r < r_1$. Montrer que $U_r = \{x \in \mathbb{R}^d : V(x) < \alpha_r\} \cap B(x^\star, r)$ est un ouvert contenant $x^\star$, et que toute trajectoire issue de U_r reste dans $B(x^\star, r)$.

      ii. Montrer que $x^\star$ est un point stationnaire stable.

   (c) On garde les mêmes hypothèses que dans la question précédente et on suppose de plus que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{x^\star\}, \quad \nabla V(x) \cdot f(x) < 0.$$

   On va montrer que le point $x^\star$ est asymptotiquement stable.

      i. Soit $0 < r < r_1$. Montrer que le flot $(t,x) \mapsto \phi_t(x)$ de (1) est bien défini sur $\mathbb{R}_+ \times U_r$.

      ii. Soit $x \in U_r$. On définit l'ensemble ω-limite $\omega(x)$ du point x de la manière suivante :

$$\omega(x) = \big\{y \in \mathbb{R}^d : \exists (t_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ t_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty,\ \phi_{t_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\to} y\big\}.$$

      Montrer que pour tout $y \in \omega(x)$, la fonction $t \mapsto V(\phi_t(y))$ est constante sur $\mathbb{R}_+$.

      iii. Montrer que $\omega(x) \subset \{y \in \mathbb{R}^d : \mathrm{d}V(y) \cdot f(y) = 0\}$ pour tout $x \in U_r$.

      iv. Prouver que $\omega(x) = \{x^\star\}$ pour tout $x \in U_r$, et conclure.

Exemple important : si $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2, c'est une fonction de Liapounov pour l'EDO donnée par son champ de gradient : $x'(t) = -\nabla g(x(t))$.