Espaces vectoriels normés et applications linéaires continues

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $R = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ et $\rho = \inf_{\|x\|=1} \|Ax\|$ sont atteints.
   (b) Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres complexes de A. Est-ce que $R = \max |\lambda_i|$ et $\rho = \min |\lambda_i|$?
   (c) Donner une condition suffisante (intéressante) pour que la suite définie par $X_{k+1} = AX_k$ converge, pour un X_0 donné dans $\mathbb{R}^n$.
   (d) Si A est symétrique, montrer en considérant le problème d'optimisation sous contrainte $\sup_{\|x\|^2=1} {}^t xAx$ que A admet une valeur propre réelle. En déduire qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée.

2. Soit $n \geq 1$, $p > 1$, et $p^\star$ tel que $1/p + 1/p^\star = 1$. Montrer qu'il existe c_n tel que pour tout $P = \sum a_i X^i$ dans $\mathbb{R}_n[X]$,
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{P(t)}{(1+t^{4n})^{p^\star}} dt \leq c_n \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p}.$$

3. Sur $\mathbb{R}[X]$, comparer les deux normes suivantes : $\|\cdot\|_\infty$ (plus grand coefficient en module) et $\|P\|_h = \sum |a_k|/(1+k)$ (norme OK?).

4. *Théorème de Riesz.*
   (a) Montrer que les normes sont équivalentes en dimension finie. *Indice : montrer que les compacts pour* $\|\cdot\|_\infty$ *sont les fermés bornés.*
   (b) Soit E un evn et $M \subset E$ un sev fermé différent de E. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $u \in E$ de norme 1 tel que $d(u, M) \geq 1 - \epsilon$.
   (c) En déduire que si E est de dimension infinie, sa boule unité fermée n'est pas compacte. *Un sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé, OK ?*

5. Soit $E = (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Est-ce que l'application $\phi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(f) = \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^{1} f$ est continue ? Si oui, est-ce que sa norme est atteinte ? Quid si $E = (L^\infty([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$?
   ($\star$) *Pour aller plus loin :* en déduire que $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas réflexif.

6. Soit $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $p < q$.
   (a) On définit
$$\ell^p = \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\Big|\; \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\},$$
   muni de la norme $\|(x_n)\|_p = (\sum |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. Y a-t-il une inclusion entre ℓ^p et ℓ^q ? Si oui, est-ce que l'injection est continue ?
   (b) Soit μ une mesure finie sur un espace X. Y a-t-il une inclusion entre $L^p(X, \mu)$ et $L^q(X, \mu)$? Si oui, est-ce que l'injection est continue ?

7. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $\alpha > 0$ et toute fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$, on définit
$$|f|_\alpha = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$
   On considère ensuite l'espace de Hölder $C^{0,\alpha}(\Omega) = \left\{ f \in C^0(\Omega) \mid |f|_\alpha + ||f||_\infty < +\infty \right\}$.
   (a) Soit $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, montrer que f se prolonge de manière unique en une fonction $\overline{f}$ continue sur $\overline{\Omega}$ et que $\overline{f} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.
   (b) On suppose Ω borné.
      i. Montrer que si $\alpha < \alpha'$ alors $C^{0,\alpha'}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\Omega)$.
      ii. On suppose de plus que Ω est convexe. Montrer que si $f \in C^1(\Omega)$ et Df est borné alors $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ pour tout $\alpha < 1$.
      iii. Montrer que si $\alpha > 1$ alors $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est constitué de fonctions localement constantes.
   (c) On note $||.||_{C^{0,\alpha}} = |.|_\alpha + ||.||_\infty$. Montrer que $(C^{0,\alpha}(\Omega), ||.||_{C^{0,\alpha}})$ est un espace de Banach.
   (d) On suppose de nouveau que Ω est borné. Montrer que l'injection $(C^{0,\alpha}(\Omega), ||.||_{C^{0,\alpha}}) \hookrightarrow (C^0(\overline{\Omega}), ||.||_\infty)$ est compacte (c'est-à-dire que de toute suite bornée pour $||.||_{C^{0,\alpha}}$, on peut extraire une sous-suite convergente pour $||.||_\infty$).

Baire et quelques conséquences

8. (a) Montrer qu'un espace métrique complet X vérifie la *propriété de Baire* : toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans X est dense dans X.
   (b) Montrer qu'un espace vectoriel normé admettant une base infinie dénombrable n'est pas complet.
   (c) Montrer qu'il n'existe pas de partition dénombrable de $[0,1]$ avec des fermés.
   (d) Montrons que l'ensemble des fonctions continues et nulle part dérivables est dense dans $\left(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$:
      i. On définit pour chaque n l'ensemble
      $$F_n = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \exists x \in [0,1], \forall y \in [0,1], |f(x) - f(y)| \leq n|x-y| \right\}.$$
      Montrer que F_n est un fermé d'intérieur vide.
      ii. Montrer que si f est continue en un point, elle appartient à un F_n. Conclure.
   (e) Savez-vous montrer qu'il n'existe aucune fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont les points de continuité sont exactement les rationnels ?

Théorèmes de Banach

9. Soient E et F deux espaces de Banach. Soit (T_n) une suite d'applications linéaires continues de E dans F telle que, pour tout $x \in E$, $(T_n x)$ converge vers une limite notée Tx.
   (a) Montrer que $x \mapsto Tx$ est linéaire.
   (b) Montrer que $\sup\limits_n ||T_n|| < +\infty$. En déduire que T est continue.
   (c) Montrer que
   $$||T|| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} ||T_n||.$$
10. *Application ouverte*
   (a) Énoncer le théorème de l'application ouverte.
   (b) En déduire que si E et F sont deux Banach et si $T : E \to F$ est une application linéaire bijective et continue, sa réciproque est continue.
   (c) Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $||.||_1$ et $||.||_2$ telles que $(E, ||.||_1)$ et $(E, ||.||_2)$ soit des espaces de Banach. Montrer que s'il existe $C > 0$ telle que
   $$\forall x \in E, \quad ||x||_1 \leqslant C||x||_2,$$
   alors les deux normes $||.||_1$ et $||.||_2$ sont équivalentes.
11. *Autour du graphe fermé.* On considère $T : \begin{array}{ccc} \left(L^2([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^1}\right) & \to & \left(L^2([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2}\right) \\ f & \mapsto & f \end{array}$.
   (a) Vérifier que $\|\cdot\|_{L^1}$ est une norme sur $L^2([0,1],\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que le graphe de T est fermé.
   (c) Montrer que T n'est pas continu.
   (d) Est-ce que $(L^2, \|\cdot\|_{L^1})$ est complet ?
12. *Avec Banach-Steinhaus et Ascoli uniforme.*
   Soit $E = (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. On va montrer le résultat suivant : *si F est un sev fermé de E tel que tout élément de F est dérivable, alors F est de dimension finie.*
   (a) Si $x_0 \in [0,1]$ est fixé, on définit $T_y : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \end{array}$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que
   $$\forall f \in F, \quad \forall y \in [0,1] \setminus \{x_0\}, \qquad |T_y(f)| \leq M\|f\|_\infty.$$
   (b) Montrer que pour tout $x_0 \in [0,1]$, la boule unité fermée de F forme une famille équicontinue en x_0.
   (c) Montrer que la boule unité fermée de F est une partie compacte de F et conclure.