Pot pourri : révisions pour l'écrit.

1. Démontrer l'*inégalité de Jensen* : soit (X, μ) un espace de proba ($\mu(X) = 1$), $\varphi : I \to \mathbb{R}$ convexe, et $f : X \to I$ intégrable. Si $\varphi \circ f$ est positive <u>ou</u> intégrable, alors
$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f d\mu.$$

2. Rappeler la définition de norme sup et de support pour une fonction mesurable sur un espace mesuré Ω.

3. *Espaces L^p, pour $p \in [1, \infty]$.*

   (a) Rappeler l'inégalité de Hölder et sa démonstration.
   Inégalité de Young : si $a, b \geq 0$, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ pour p et q conjugués.

   (b) Pour des espaces de mesure finie, montrer que les L^p sont inclus les uns dans les autres quand p varie, avec injection continue.

   (c) Soient $f_i \in L^{p_i}$, pour $i = 1 \dots k$, avec $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1$. Montrer que le produit $f = f_1 \cdots f_k$ est dans L^p avec
$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_k\|_{p_k}.$$

   (d) En déduire que si $f \in L^p \cap L^q$ avec $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors f est dans L^r pour tout $r \in [p, q]$ avec l'*inégalité d'interpolation* qui suit : si α est le réel tel quel $r = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$,
$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha} \cdots \|f\|_q^{1-\alpha}.$$

   (e) Vérifier que $\|\cdot\|_p$ est une norme (la sous-additivité est appelée *inégalité de Minkowski*).

   (f) Montrer que L^p est un espace de Banach (*théorème de Fischer-Riesz*).

   (g) Montrer que si f_n est une suite de L^p qui converge vers f en norme L^p, il existe une sous-suite extraite qui converge presque partout vers f et est dominée presque partout par une fonction h dans L^p.

   (h) *Parties denses de L^p.* Pour $1 \leq p \leq \infty$, montrer que l'espace des fonctions étagées (c'est l'espace vectoriel engendré par les indicatrices d'ensembles mesurables) est dense dans L^p. Pour $1 \leq p < \infty$, et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, montrer que les fonctions continues à support compact dans Ω sont denses dans $L^p(\Omega)$.

   (i) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Montrer que si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ vérifie $\int f\varphi = 0$ pour toute fonction φ continue à support compact dans Ω, alors $f = 0$ presque partout.

4. *Convolution*

   (a) Si f est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et g dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, montrer que $f * g$ est dans L^p avec $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

   (b) Démontrer l'*inégalité de Young* (une autre !) : soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, avec $1 \leq p, q \leq \infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$. Alors $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ et
$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

   (c) Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (c'est le cas $r = \infty$ de la question précédente). Montrer que $f * g$ est définie en tout point et uniformément continue. Si de plus $1 < q, p < \infty$, montrer que $f * g$ tend vers 0 à l'infini. *On définit $\tau_h : f \mapsto f(h + \cdot)$, et on prouve que $\tau_h f \mapsto f$ en norme L^p quand $\|h\| \to 0$ si $p < \infty$.*

   (d) Avec la définition de support énoncée plus haut, montrer que si $f \in L^1$ et $g \in L^p$, $\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$.

   (e) Soient f dans $C_c(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $f * g$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$.

   (f) Soient f dans $C_c^k(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Vérifier que $f * g$ est de classe C^k avec dérivée $D^{\alpha}(f * g) = D^{\alpha} f * g$ pour tout multi-indice α de longueur inférieure à k.

   Soit ρ_n une suite de fonctions positives sur $\mathbb{R}^d$, de classe C^{∞}, dont le support est inclus dans $B(0, \frac{1}{n})$ et d'intégrale égale à 1.

   (g) Montrer que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$, $\rho_n * f$ converge uniformément vers f.

   (h) Montrer que si f est dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leq p < \infty$, $\rho_n * f$ converge vers f en norme L^p.

   (i) Montrer que pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, $C_c^{\infty}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$. Et si $p = \infty$?

   (j) Si g est développable en série entière et f est une fonction continue à support compact, montrer que $f * g$ est développable en série entière. En déduire une preuve du *théorème d'approximation de Weierstrass* en utilisant la suite régularisante associée à la gaussienne $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ qui est développable en série entière.

5. Déterminer les extrema locaux des applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 3x^3 + xy^2 - xy \end{array} \quad \text{et } g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2(1+y)^3 + y^2. \end{array}$$

Ces extrema sont-ils globaux ? Y a-t-il d'autres points critiques ? Quelle est la particularité du deuxième exemple ?

6. On note E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme. On définit :

   (a) $M_1 = \{t \to t^n, n \in \mathbb{N}\}$

   (b) $M_2 = \{t \mapsto \sin(t+n), n \in \mathbb{Z}\}$

   (c) $M_3 = \{t \to \int_0^t f(x)dx, f \in E, \|f\|_\infty \leq 1\}$

   (d) $M_4 = \{f \in E, |\int_0^1 f(t)t^n dt| \leq \frac{1}{n}\}$

   Pour $i = 1, \dots, 4$, est-ce que toute suite de M_i admet nécessairement une sous-suite qui converge dans E ?

7. *Autour des théorèmes de Stone et Weierstrass.*

   (a) Montrer le *théorème de Stone-Weierstrass* : soient X un espace compact et $C(X)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. Une sous-algèbre est dense dans $C(X)$ si (et seulement si) elle sépare les points et contient, pour tout point x de X, une fonction qui ne s'annule pas en x. On pourra suivre la démarche suivante :

      i. Approcher $t \mapsto |t|$ en norme uniforme par des polynômes sur $[-1,1]$ en utilisant une série de Taylor ad hoc. *On peut aussi voir cela comme une conséquence du* théorème d'approximation de Weierstrass... *qu'il faut alors démontrer indépendamment !*

      ii. Montrer que si f et g sont dans une sous-algèbre A de $C(X)$, $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ sont dans $\bar{A}$.

      iii. Conclure en utilisant le lemme de Borel-Lebesgue.

   (b) Soit (X,d) un espace métrique recouvert par une suite exhaustive de compacts, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles compacts de X telle que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ et $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ pour tout n.

      i. Montrer que pour tout compact S de X, il existe un n tel que $S \subset K_n$.

      ii. Montrer que si A est une sous-algèbre des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui sépare les points, alors pour toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge uniformément vers f sur tout compact.

   (c) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble des fonctions polynomiales de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{C}$ n'est pas dense dans $C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{C})$ muni de la norme uniforme.
   Indication : On pourra utiliser que pour tout lacet fermé $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ de classe C^1 et toute fonction polynomiale f, $\int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = 0$.

8. Donner un exemple de problème de Cauchy d'ordre 1, sur un intervalle de $\mathbb{R}$, associé à une équation différentielle ordinaire et une donnée initiale en un temps donné, pour lequel il n'y a pas unicité de la solution. En donner un autre pour lequel il existe une unique solution maximale qui n'est pas globale. Est-ce possible avec une équation différentielle linéaire ? Dire pourquoi une solution non nulle d'une équation linéaire homogène d'ordre 1 ne peut s'annuler en aucun point.

9. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, avec I ouvert et J compact, et $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une dérivée partielle en la première variable continue sur $I \times J$. On considère $a, b : I \to J$ deux applications dérivables et $F : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

   Montrer que F est dérivable sur I et calculer sa dérivée de deux manières différentes.

10. *Calcul d'une transformée de Fourier.* En formant une équation différentielle vérifiée par f, calculer la valeur de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{itx} dt.$$