Colle n°17 : espaces vectoriels I

Semaine du 20/03/2023

- Notion d'addition et de produit externe sur un ensemble, structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Espaces vectoriels usuels avec leurs opérations : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
- Famille de vecteurs et notion de combinaison linéaire.
- Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. Un sous-espace vectoriel est aussi un espace vectoriel.
- Espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.
- Famille génératrice d'un (sous-)espace vectoriel. Exemples de détermination d'une famille génératrice de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à l'aide du pivot de Gauss.
- Famille libre ou liée. Cas des familles de 1 ou 2 vecteurs, des familles contenant le vecteur nul, ou deux vecteurs identiques.
- Base d'un espace vectoriel, existence et unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base. Bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Ce que le programme ne contient pas (encore !) :

- la théorie de la dimension,
- des applications linéaires,
- des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels...

Question de cours :

- Méthode pour montrer qu'un ensemble de E est un sous-espace vectoriel de E.
- Définition de famille génératrice d'un ensemble, famille libre, famille liée.
- Démonstration de l'existence et unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base à partir des définitions de famille génératrice/libre.