Devoir en temps libre 9

À rendre pour le lundi 20 février 2023

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est proscrit lors des devoirs sur table, il est donc fortement recommandé de s'habituer dès maintenant à ces nouvelles exigences.

Pour les devoirs maison, il est possible de travailler à plusieurs pour réfléchir aux exercices, de se faire aider (après avoir essayé) ou de poser des questions au professeur. Par contre, il est indispensable que la rédaction des exercices soit personnelle.

Exercice 1. (TVI, continuité, injectivité et monotonie). Le but de cet exercice est de démontrer qu'une fonction f continue et injective sur un intervalle I est nécéssairement strictement monotone sur cet intervalle. On suppose donc f continue et injective sur I.

1. Soient $a < b$ deux éléments de I, justifier que l'on a $f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b)$.
2. On suppose que $f(a) < f(b)$ et on va montrer que f est strictement croissante sur $[a, b]$.
   a. Soit $x \in]a, b[$ et supposons que $f(x) \leqslant f(a)$. Montrer, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur $[x, b]$, qu'il existe $d \in [x, b]$ tel que $f(d) = f(a)$. En déduire une contradiction.
   b. Soit $x \in]a, b[$, montrer de même que l'on ne peut pas avoir $f(x) \geqslant f(b)$.
   c. Soient x et x' tels que $a < x < x' < b$, on sait déjà que $f(x)$ et $f(x')$ appartiennent à $]f(a), f(b)[$. Montrer que l'on ne peut pas avoir $f(x') \leqslant f(x)$.
3. Conclure sur la monotonie de f sur tout intervalle $[a, b]$ inclus dans l'intervalle I. Pour quel type d'intervalle I le travail est-il terminé ?
4. I est un intervalle quelconque.
   a. Montrer que l'on ne peut pas avoir deux intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$ inclus dans I tels que f soit strictement croissante sur l'un et strictement décroissante sur l'autre.
   b. Traduire avec des quantificateurs la proposition "f est strictement croissante sur I ou f est strictement décroissante sur I" puis en donner la négation.
   c. Conclure sur la stricte monotonie de f sur I.
5. Donner un exemple de fonction continue, injective et non strictement monotone sur une union de deux intervalles.

Exercice 2. (continuité, injectivité, fonction réciproque)

1. Existe-t-il une bijection continue entre $[0, 1[$ et $\mathbb{R}$? Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.
2. Soit la fonction $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \geqslant -1, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}.$$
   Déterminer $f([-1, +\infty[)$. Montre que f réalise une bijection entre $[-1, +\infty[$ et $f([-1, +\infty[)$, et expliciter ensuite la fonction réciproque $f^{-1} : f([-1, +\infty[) \to [-1, +\infty[$.
3. Trouver le plus grand intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0 sur lequel la fonction
$$g_I : x \in I \to \tan(x^3)$$
   soit injective et réalise donc une bijection entre I et $g(I)$. Donner alors le domaine de définition de la fonction réciproque g^{-1} et l'ensemble d'arrivée.

Question bonus.

Théorème de Cantor. Si E est un ensemble, alors il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.

Démontrer ce théorème en considérant pour $f : E \to \mathcal{P}(E)$ l'ensemble $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$.