

## Devoir en temps libre 10 : Espaces vectoriels

À rendre pour le 4 avril

*La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont primordiales dans l'appréciation d'une copie de mathématiques.*

---

**Exercice 1.** Soient  $E$  un espace vectoriel, et soit  $F_1, F_2$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

1. Montrer que  $F_1 \cap F_2$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Fournir un contre-exemple dans le cas de la réunion de sous-espaces vectoriels : donner un espace vectoriel  $E$  et des sous-espaces vectoriels  $F_1, F_2$  tels que  $F_1 \cup F_2$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $E$ . *Indication : on pourra trouver des contre-exemples dans  $E = \mathbb{R}^2$ .*

**Exercice 2.** Soient  $E, F, G$  trois  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels, et soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$  des applications linéaires.

1. Montrer que  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ .
2. Montrer que  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ .
3. En déduire que
  - a. si  $g \circ f$  est injective, alors  $f$  est injective,
  - b. si  $g \circ f$  est surjective, alors  $g$  est surjective.
4. On considère maintenant les applications  $f$  et  $g$ , définies sur l'ensemble des suites à valeurs réelles de la manière suivante : si  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , alors

$$(f(u))_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ u_{n-1} & \text{si } n \geq 1, \end{cases} \quad (g(u))_n = u_{n+1}.$$

Montrer que  $g \circ f$  est bijective.

5. En déduire une réponse à la question : si  $g \circ f$  est bijective, peut-on dire que  $f$  l'est aussi ?

**Exercice 3.** Dans cet exercice,  $E$  désigne l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Soit  $T > 0$ , et soit  $F_T \subset E$  l'ensemble des fonctions  $T$ -périodiques. Montrer que  $F_T$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Considérons la fonction  $f : x \mapsto \sin(x) + \sin(\pi x)$ , et supposons qu'il existe  $T > 0$  tel que  $f$  soit  $T$ -périodique.
  - a. Justifier que  $f'$  est  $T$ -périodique, puis que  $f''$  l'est aussi.
  - b. En déduire que

$$\begin{cases} \sin(T) + \sin(\pi T) = 0, \\ \sin(T) + \pi^2 \sin(\pi T) = 0. \end{cases}$$

- c. Résoudre le système de la question b., et en déduire une absurdité. *Indication :  $\pi$  n'est pas rationnel.*
- d. Est-ce que l'ensemble des fonctions  $f \in E$  périodiques est un sous-espace vectoriel ?