

## Devoir en temps libre 12 : sujet

À rendre pour le 31/05/2023

*La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont primordiales dans l'appréciation d'une copie de mathématiques.*

**Exercice 1.** 1. Calculer les développements limités en  $a$  à l'ordre  $n$  des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad a = 0, \quad n = 4$$

$$g(x) = \frac{1 + x + x^2}{1 - x - x^2}, \quad a = 0, \quad n = 3$$

$$h(x) = x^2 + 3x + 1, \quad a = 2, \quad n = 4$$

$$l(x) = \sqrt{x}, \quad a = 2, \quad n = 3.$$

2. En utilisant un développement limité, trouver les limites des fonctions suivantes en 0 :

$$f_1(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$

$$f_2(x) = \frac{\sin(\tan x) - \tan(\sin x)}{x^7}$$

$$f_3(x) = (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$$

**Exercice 2.** (DL d'une fonction réciproque)

1. Montrer que la partie principale d'un DL en 0 d'une fonction paire (resp. impaire) ne contient que des termes de degré pair (resp. impair).

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  par  $f(x) = 2 \tan(x) - x$ .

2. Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque de classe  $C^\infty$ .

3. Justifier que  $f^{-1}$  est impaire.

4. Donner le DL de  $f^{-1}$  à l'ordre 5 en 0.

**Exercice 3.** (Tangente géométrique à un graphe)

Soit la fonction  $f : x \mapsto \ln(x^2 + 2x + 2)$ .

1. Calculer le DL de  $f$  à l'ordre 3 en 0.

2. Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point  $(0, \ln(2))$ , et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.

### *Exercice facultatif*

**Exercice 4.** (Un DL par équation différentielle)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1, 1[$  par  $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ .

1. Déterminer la fonction  $h : ] -1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour tout  $x \in ] -1, 1[$ ,

$$f'(x) + h(x)f(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

2. Déterminer le DL à l'ordre 4 en 0 de  $h$ .

3. En déduire le DL à l'ordre 5 en 0 de  $f$ .