Devoir surveillé du 8/12/2022 : Résolution de systèmes linéaires

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit.

La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont primordiales dans l'appréciation d'une copie de mathématiques.

Il est conseillé de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.

On peut admettre le résultat d'une question et poursuivre l'exercice.

Exercice 1 (Méli-mélo)**.** Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ x - 3y - 4z = 5 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ x - 2y + 4z = 1 \end{cases}$$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En écrivant $A = I_3 + B$, commencer par calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer la limite des suites suivantes :

$$u_n = 3^n - n^2 2^n, \quad v_n = \frac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n}}{2n + 3}.$$

4. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

   Montrer que pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$. Que vaut $R(0)$? En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $R(\theta)$ est inversible, et donner son inverse.
5. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels positifs telles que $\lim_{n \to +\infty}(u_n + v_n) = 0$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 0.

Exercice 2. Résoudre le système suivant en fonction de la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ et de $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$(S_m) : \begin{cases} mx + my + mz = a \\ x + my + z = b \\ x + y + mz = c \end{cases}$$

Indication : il faudra faire des disjonctions de cas selon la valeur de m.

Exercice 3. On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie comme suit :

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On définit aussi la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite de Fibonacci, puis calculer A^2 et A^3.
2. Déterminer le terme général de la suite (F_n).
3. Quelle est la limite de $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$?
4. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

5. En déduire que pour tous entiers n, p tels que $n \geqslant 0$ et $p \geqslant 1$,

$$F_{n+p} = F_{n+1}F_p + F_nF_{p-1}.$$