Devoir surveillé du 13/01/2023

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit.

La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont primordiales dans l'appréciation d'une copie de mathématiques.

Il est conseillé de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.

*Ce sujet contient **2 pages**.*

On peut admettre le résultat d'une question et poursuivre l'exercice.

Exercice 1. Vrai ou faux ? Justifier rigoureusement les assertions vraies et donner un contre-exemple aux assertions fausses.

1. Une suite réelle non majorée tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
2. Si deux suites réelles convergent vers une même limite finie ℓ, alors leur différence converge vers 0.
3. Si un polynôme s'annule sur l'intervalle $[0, 1]$, alors c'est le polynôme nul.
4. Le degré d'une somme de deux polynômes est égal au plus grand des degrés de ces deux polynômes.
5. Le degré d'un produit de deux polynômes non nuls est égal à la somme des degrés de ces deux polynômes.

Exercice 2. On définit le polynôme $P = X^6 - 6X^5 + 15X^4 - 19X^3 + 12X^2 - 3X$.

1. Donner le degré, le coefficient dominant et le terme constant de P.
2. Montrer que 1 est racine de P et déterminer sa multiplicité.
3. Déterminer une autre racine évidente de P.
4. Écrire la division euclidienne de P par le polynôme $X(X-1)^3$, qu'on aura pris soin de développer.
5. Justifier que le quotient obtenu la division euclidienne précédente est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
6. En déduire la factorisation de P en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
7. Déterminer les deux racines complexes non réelles de P et en déduire sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 3. Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M est *nilpotente* s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = \mathbb{O}_n$. On appelle alors *indice de nilpotence* de M le plus petit entier p tel $M^p = \mathbb{O}_n$.

1. Dans cette question, on étudie quelques exemples et cas particuliers de matrices nilpotentes ou non.
   a. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est nilpotente et déterminer son indice de nilpotence.
   b. On note $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer B^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et en déduire que B n'est pas nilpotente.
   c. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle et nilpotente. Préciser son indice de nilpotence.
2. a. Montrer que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors elle n'est pas inversible.
   b. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.
   c. Montrer que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente alors $I_n - N$ est inversible.
   Indication : considérer $\sum_{k=0}^{p-1} N^k$.

Exercice 4. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1 + x + x^2}$ et on note $\mathcal{C}_f$ son graphe.

1. a. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   b. Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
   c. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   d. Étudier le signe de $g(x) = f(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}$, en précisant les points d'annulation.
   e. Représenter de $\mathcal{C}_f$ et T dans un repère orthonormé, en soignant particulièrement leurs positions relatives.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   b. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   c. En déduire que (u_n) converge en précisant sa limite.
3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_0 = -\frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.
   a. Justifier que $\forall x \in [-1, 0]$, $f(x) \in [-1, 0]$.
   b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [-1, 0]$.
   c. Étudier les variations de (v_n).
   d. En déduire que (v_n) converge et préciser la valeur de sa limite.
4. Représenter sur le graphe de f les trois premiers termes des suites u et v.