Devoir surveillé du 03/02/2023

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit.

La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont primordiales dans l'appréciation d'une copie de mathématiques.

Il est conseillé de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.

*Ce sujet contient **2 pages**.*

On peut admettre le résultat d'une question et poursuivre l'exercice.

Exercice 1. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Déterminer tous les réels a et b tels que $X^2 + 2X + 1$ divise le polynôme $X^4 + 2X^3 + aX + b$.
   Indication : division euclidienne !
2. Donner, sous forme développée, l'unique polynôme unitaire de degré 3 admettant 1, -1 et 3 comme racine.
3. Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\exp(x)-1}$.
   a. Donner le domaine de définition de f et montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
   Indication : on pourra identifier l'inverse d'un taux d'accroissement bien connu.
   b. Donner les limites de f en $\pm\infty$.

   On admet que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

   c. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   Indication : on pourra étudier les variations de la fonction $x \mapsto \exp(x)(1-x)$ sur $\mathbb{R}$.
   d. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle injective ? surjective ? Pour quel ensemble E l'application $f : \mathbb{R} \to E$ est-elle une bijection ?
4. Parmi les fonctions usuelles suivantes, dire lesquelles sont injectives :

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \quad \arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \mapsto x^2, \quad x \in \mathbb{R}^\star \mapsto \frac{1}{x}, \quad \ln : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}.$$

($\star$) 5. Montrer que l'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ & (q,p) & \mapsto & 2^p 3^q \end{array}$ est injective. Est-elle surjective ?

Exercice 2. Déterminer les limites suivantes, si elles existent, en justifiant rigoureusement les raisonnements :

a) $\frac{n^2-1}{n^2+1}\exp(1+1/n)$ quand n tend vers $+\infty$,

b) $\arctan\left(\frac{x^2+2x}{-x+1}\right)$ quand x tend vers $\pm\infty$,

c) $\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)\ln(1+\exp(x))$ quand x tend vers $+\infty$,

d) $\frac{x-\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x}}$ quand x tend vers $+\infty$ et vers 0.

Exercice 3. On considère les 3 matrices de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculs de puissances de matrices.
   a. Calculer les matrices L^2, M^2, LM et ML.
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L^n = 3^{n-1}L$ et $M^n = 3^{n-1}M$.
   c. Déterminer des réels a et b tels que $A = aL + bM$.
   d. En déduire que $A^n = \frac{1}{3}\big((-1)^n L + 2^n M\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   e. Donner les coefficients de la deuxième colonne de A^7.

On définit de plus les matrices colonnes suivantes :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n + U.$$

Dans les questions 2 et 3, on va exprimer de deux manières différentes X_n à l'aide des puissances de A .

2. a. Calculer X_1 puis X_2.
   b. Déterminer $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = AY + U$. *On pourra se ramener à l'équation* $(I_3 - A)Y = U$.
   c. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n - Y = A^n\big(X_0 - Y\big)$
3. a. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = A^n X_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right) U$.
   b. Exprimer, à l'aide des matrices L et M, la matrice $S_n = \sum_{k=0}^{n} A^k$.
4. Déterminer explicitement, à l'aide de la question 3 ou 4, les coefficients de X_7.

Exercice 4. Pour a un réel non nul fixé, on considère les fonctions f_a et g_a définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f_a : x \mapsto x^{1-x^a} \qquad \text{et} \qquad g_a : x \mapsto x^a\big(1 + a\ln(x)\big) - 1.$$

Attention, l'image de x par f_a est bien : x à la puissance $(1 - x^a)$.

1. Préliminaires
   a. Rappeler la définition de x^a à l'aide des fonctions exponentielle et logarithme.
   b. Déterminer, en justifiant, les limites $\lim_{x\to 0^+} x^a$ et $\lim_{x\to+\infty} x^a$ dans le cas $a > 0$.
   c. Faire de même dans le cas $a < 0$.
   d. Déterminer les limites de $x^a \ln(x)$ quand $x \to 0^+$ et $x \to +\infty$, en distinguant les cas $a > 0$ et $a < 0$.
2. On suppose dans cette question que $a > 0$.
   a. Justifier que la fonction f_a est continue sur $]0, +\infty[$.
   b. Montrer que les fonctions f_a et g_a se prolongent par continuité en 0.
   On note encore f_a et g_a les fonctions ainsi prolongées.
   c. Déterminer le tableau de variations de la fonction g_a en précisant la valeur de son minimum sur $\mathbb{R}_+$.
   d. Calculer $g_a(1)$ et en déduire le tableau de signes de g_a sur $\mathbb{R}_+$.
   e. Calculer la dérivée de f_a et donner son tableau de variations à l'aide de la question précédente.
   f. Représenter l'allure du graphe de f_a à l'aide d'une tangente horizontale et d'une asymptote.
3. On suppose dans cette question que $a < 0$.
   a. Peut-on prolonger la fonction f_a par continuité ?
   b. Exprimer $\dfrac{f_a(x) - x}{x^{a+1}\ln(x)}$ en fonction $u_a(x) = x^a \ln(x)$ puis montrer que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f_a(x) - x}{x^{a+1}\ln(x)} = -1$.
   c. En déduire la limite de $f_a(x) - x$ lorsque $x \to +\infty$ en distinguant les cas $a < -1$ et $a \in]-1, 0[$.
   d. En reprenant certains calculs de la question 2, donner le tableau de variations de f_a.
   e. Représenter l'allure du graphe de f_a dans le cas $a < -1$ à l'aide d'une tangente horizontale et de deux asymptotes.

Exercice 5 (Bonus)**.** Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant : toute surjection monotone d'une partie de $\mathbb{R}$ dans un intervalle est continue. Ce résultat permet de montrer que la réciproque d'une fonction strictement monotone définie sur un intervalle est continue, point admis dans le cours.

On note D une partie de $\mathbb{R}$, I un intervalle et on considère une application surjective $f : D \to I$ monotone. On va démontrer que f est continue.

1. Rappeler la définition d'un intervalle.
2. Justifier qu'on peut supposer que f est croissante et non constante.
3. Soit $x \in D$ et $y = f(x)$. Montrer que f est continue en x dans les trois cas suivants :
   a. il existe $r > 0$ tel que $[y - r, y + r] \in I$,
   b. $y = \sup I$,
   c. $y = \inf I$.
4. Justifier que tout y de I vérifie bien l'un de ces cas.