Devoir surveillé du 10/03/2023

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit.
La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont primordiales dans l'appréciation d'une copie de mathématiques.
Il est conseillé de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.
On peut admettre le résultat d'une question et poursuivre l'exercice.

Exercice 1. Vrai ou faux ? Démontrer les assertions vraies et donner un contre-exemple aux assertions fausses.

1. L'application réciproque d'une application bijective est bijective.
2. Si E est un ensemble et $f : E \to E$ une application, alors f est injective si et seulement si elle est surjective.
3. Si une fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors sa dérivée admet une limite en 0.
4. La fonction argsh est impaire.
5. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable paire, alors sa dérivée est impaire.
6. Si un polynôme à coefficients réels est de degré pair, alors son polynôme dérivé admet une racine réelle.
7. Si $f : E \to F$ est surjective et E est de cardinal fini $n \in \mathbb{N}^\star$, alors F possède au moins n éléments.
8. Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dérivable et $f(0) = 0$, alors il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x\ln(x) - 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

dont voici un tableau de valeurs approchées à 10^{-1} près :

x	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x)$	-1	$-0,4$	0	$0,6$	$1,6$	$3,0$	$4,7$	$6,9$	$9,5$

ainsi que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$.

1. a. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   b. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.
   c. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier la fonction f' sur cet intervalle. Quel est son signe ?
   d. Dresser le tableau de variations de f en précisant la limite en $+\infty$.
2. Étude d'une première suite définie à l'aide de la fonction f.
   a. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x_k \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x_k) = k$.
   b. Donner la valeur de x_0.
   c. À l'aide du tableau de valeurs de f, donner des encadrements à $0,5$ près de x_1 et de x_2.
   d. Déterminer le sens de variation et la limite (si elle existe) de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
   a. Donner le tableau de variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b. En étudiant les variations de φ', montrer que $|\varphi'(x)| \leqslant \frac{2}{9}$ pour tout $x \in [\frac{3}{2}, 2]$.
   c. Montrer que $\varphi\big([\frac{3}{2}, 2]\big) \subset [\frac{3}{2}, 2]$.
   Indication : On pourra utiliser sans démonstration les inégalités : $\ln(2) \geqslant \frac{1}{2}$ et $\ln(3) \leqslant \frac{7}{6}$.
   d. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ x = \varphi(x) \iff f(x) = 1$.
   En déduire que x_1, défini à la question 2, est l'unique point fixe de φ.
   e. Montrer successivement que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   i) $\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$; ii) $|u_{n+1} - x_1| \leqslant \frac{2}{9}|u_n - x_1|$; iii) $|u_n - x_1| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^n$.

   f. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   g. Déterminer une valeur de n pour que u_n soit une valeur approchée de x_1 à 10^{-3} près.

Exercice 3. On va répondre au problème suivant : *Combien y-a-t-il de façons de monter un escalier de n marches en faisant des pas de* 1 *ou* 2 *marches ?* On appelle T_n ce nombre, en posant par convention $T_0 = 1$. On va étudier deux manières d'obtenir le terme général de T_n, les trois questions de l'exercice sont par conséquent indépendantes.

1. Étudier les cas $n = 1, 2, 3, 4$.
2. On note i le nombre de pas de 2 marches.
   a. Montrer que $0 \leqslant i \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
   b. Si i est fixé, combien y a-t-il de pas à 1 marche ?
   c. Combien y a-t-il de manières de monter l'escalier de n marches en ayant fait exactement i pas de 2 marches ?
   d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$T_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i}.$$
3. a. En considérant la nature du premier pas, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$T_{n+2} = T_{n+1} + T_n.$$
   b. En déduire l'expression de T_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. On étudie la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-x^2/2)$.

1. a. Montrer que f est deux fois dérivables et que sa dérivée seconde vérifie :
$$\forall x \in [0,1], f''(x) = (x^2 - 1)f(x).$$
   b. En déduire le tableau de variations de f'.
   c. Montrer que pour tout $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$, on a
$$f'(\beta)(\beta - \alpha) \leqslant f(\beta) - f(\alpha) \leqslant f'(\alpha)(\beta - \alpha).$$
2. Soit $a \in]0,1[$ et T_a la tangente au graphe de f au point d'abscisse a.
   a. Déterminer l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $y = u(x)$ est une équation de T_a.
   b. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant u(x)$.
   Indication : on pourra distinguer le cas $0 \leqslant x < a \leqslant 1$ et $0 \leqslant a \leqslant x \leqslant 1$.
   c. Interpréter géométriquement ce résultat.
3. Soient $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ et $D_{a,b}$ la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. On appelle cela une *corde* sur le graphe de f.
   a. Déterminer l'application $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $y = v(x)$ est une équation de $D_{a,b}$.
   b. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $v'(c) = f'(c)$.
   c. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant v(x)$.
   d. Interpréter géométriquement le résultat.
4. a. Pour quel intervalle I l'application $f : [0,1] \to I$ est-elle bijective ? Démontrer le résultat.
   b. Sans déterminer l'expression explicite de $f^{-1} : I \to [0,1]$, montrer que f^{-1} est dérivable sur I privé d'un point.
   c. Montrer que $(f^{-1})'$ est monotone, à nouveau sans déterminer son expression explicite.
   d. D'après ce qui précède, que peut-on dire des tangentes au graphe de f^{-1} et des cordes sur ce graphe ?
   e. Donner l'expression explicite de f^{-1} et montrer qu'elle n'est pas dérivable en 1.

Question bonus Dans un jeu de 32 cartes, calculer le nombre de mains de 5 cartes avec 2 rois et 2 dames, puis le nombre de mains de 5 cartes avec 2 rois et 2 coeurs.