Devoir surveillé du 31/03/2023 : Espaces vectoriels

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit.

La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont primordiales dans l'appréciation d'une copie de mathématiques.

Il est conseillé de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.

On peut admettre le résultat d'une question et poursuivre l'exercice.

Exercice 1 (Méli-mélo)**.** Les questions de cette exercice, proches du cours, sont indépendantes les unes des autres.

1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Justifier la réponse.
   a. $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z+1=0\}$
   b. $E_2 = \{f \in \mathcal{C}^1[0,1],\ f(0)=f(1)=0\}$
   c. $E_3 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ A^2 = 0\}$
2. Démontrer que l'application suivante est linéaire :
$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto XP(X) + P'(2X) \end{aligned}$$
3. Déterminer l'image et le noyau de l'application linéaire suivante (pour le noyau, donner une famille génératrice).
$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto (x+y, x-y-z) \end{aligned}$$
4. Déterminer si les familles de vecteurs suivantes sont libres ou liées :
   a. $((0,0,1), (0,1,1), (1,1,1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
   b. $((1,2), (3,4), (5,6))$ dans $\mathbb{R}^2$.
   c. $((1,i), (i,-1))$ dans $\mathbb{C}^2$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2. Une urne contient 15 boules : une noire, 5 blanches et 9 rouges.

1. On tire simultanément trois boules de cette urne. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   a. A : « le tirage est tricolore, »
   b. B : « parmi les boules tirées figurent exactement une noire, et au moins une rouge, »
   c. C : « les trois boules sont de la même couleur. »
2. On suppose désormais que le tirage s'effectue successivement, et avec remise. Déterminer les probabilités des évènements A, B et C.

Exercice 3. Soit $\alpha > 0$. On considère l'application suivante :
$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x, y+\alpha x) \end{aligned}$$

1. Démontrer que g est linéaire.
2. Déterminer le noyau de g, ainsi que son image. g est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. On considère le cube $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$. Caractériser l'image de Q par g : l'écrire sous la forme suivante
$$\{g(x,y), (x,y) \in Q\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leqslant C \text{ et } f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\},$$
où C, f_1 et f_2 sont à déterminer.
4. Réprésenter les ensembles Q et $g(Q)$ graphiquement dans le cas où $\alpha = 1/2$.

Exercice 4. On se place dans E, l'espace vectoriel des fonctions continues définies sur $[0,1]$. Soient $h_1, \ldots, h_n$ des éléments de E.

1. À quelle condition les fonctions $h_1, \ldots, h_n$ forment-elles un famille libre ? L'écrire avec des quantificateurs.
2. Application : démontrer que les fonctions $h_1 : x \mapsto e^x$ et $h_2 : x \mapsto e^{2x}$ sont libres. *Indication : on pourra penser à dériver une relation de liaison.*

Exercice 5 ($\star$). Dans cet exercice, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer que si $\mathcal{F}$ n'engendre pas E, alors il existe $u_{n+1} \in E$ tel que $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$ est libre.

On admet dans la suite que si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont des familles finies, et si $\mathcal{F}_1$ est libre et $\mathcal{F}_2$ engendre E, alors $\mathrm{Card}(\mathcal{F}_1) \leqslant \mathrm{Card}(\mathcal{F}_2)$.

2. En déduire que deux bases ont même cardinal.
3. On dit qu'une famille de polynômes de $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est à *degrés échelonnés* si elle vérifie la condition $0 \leqslant \deg(P_0) < \deg(P_1) < \cdots < \deg(P_n)$. Montrer qu'une famille de polynômes à degrés échelonnés est libre.
4. Soit (P_n) la suite de polynômes donnés par
$$P_0 = 1, \quad P_{n+1} = XP_n + (X-1)^2 P_n'.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de P_n.
5. À l'aide des questions précédentes, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille$(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ des polynômes de la question précédente forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$. *Indication : pour montrer que cette famille est génératrice, on pourra procéder par l'absurde et utiliser la question 1.*