TD 7 : Matrices et systèmes d'équations linéaires

1 Opérations sur les matrices

Exercice 1. Écrire la matrice $M = (m_{i,j})$ dans chacun des cas :

1. $m_{i,j} = i + j$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant j \leqslant 2$, puis pour $i, j \in [\![1, n]\!]$.
2. $m_{i,j} = i^j$ pour $i, j \in [\![1, 3]\!]$
3. $m_{k,l} = \sin\left(\frac{\pi}{2}(k + l)\right)$ pour $1 \leqslant k \leqslant 2$ et $1 \leqslant l \leqslant 3$.

Exercice 2. On considère les trois matrices A, B et C suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Parmi les expressions suivantes, lesquels sont bien définies ? Les calculer.

$$2A, \quad -B, \quad AB, \quad BA, \quad BC, \quad CB,$$
$$A + B^t, \quad B + C^t, \quad BA + C, \quad B + (AC)^t.$$

Exercice 3. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $2B - C$ et $2AB - AC$.

Exercice 4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Calculer J^n pour $n \in \mathbb{N}$, et en déduire une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Trouver $a', b', c' \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Exercice 6. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $B = \alpha A + \beta I_2$.
3. En déduire la valeur de B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculer B^{-1}, et l'exprimer en fonction de I_2 et A.
5. La formule trouvée dans la question 3. reste-t-elle valable lorsque $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 7. On considère $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis déterminer a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = aA + bI_3$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} à l'aide de A et I_3.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
4. Montrer que (a_n) est récurrence linéaire d'ordre 2 puis déterminer les termes généraux des suites (a_n) et (b_n).

Exercice 8. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_n et b_n tels que
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On pourra faire une récurrence et définir a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. Déterminer les termes généraux des suites (a_n) et (b_n) et en déduire une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9. Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 et l'exprimer en fonction de A et I_4.
2. Montrer que la matrice A est inversible et calculer A^{-1} en fonction de A et I_4, puis préciser ses coefficients.
3. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$.
   b. Déterminer l'expression explicite de a_n et b_n en fonction de n.
4. En remarquant que $A = J - I_4$ pour une matrice J à préciser, calculer A^n et retrouver le résultat de 3.b. à l'aide de la question 1.

2 Résolution de systèmes linéaires

Exercice 10. Résoudre les systèmes linéaires d'inconnues $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ suivants :

$$(S_1):\begin{cases}x+y+z=1\\x-y-z=2\\2x-2y+z=3\end{cases}\qquad (S_2):\begin{cases}3x+y+z=2\\6x+3y+z=9.\end{cases}$$

$$(S_3):\begin{cases}x-y+2z=5\\3x-2y+z=0\\4x-3y-2z=-8\end{cases}\qquad (S_4):\begin{cases}2x+y+z=3\\3x-y-2z=0\\x+y-z=-2\\x+2y+z=1\end{cases}$$

Exercice 11. Déterminer des réels a,b,c et d tels que pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{-2,-1,0,1\}$,

$$\frac{11x^3-x+2}{(x^2-1)(x^2+2x)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1}+\frac{d}{x+2}\,.$$

Exercice 12. Résoudre le système suivant, en discutant suivant les valeurs du paramètre a :

$$\begin{cases}x+y+z=1\\x+2y+az=2\\2x+ay+2z=3\end{cases}$$

Exercice 13. On considère $A=\begin{pmatrix}1&-3&-1\\1&2&1\\4&5&3\end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible, et calculer son inverse.

Exercice 14. On considère trois réels a,b,c et la matrice

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&-1&-2\\1&2&-17\end{pmatrix}.$$

1. Résoudre les systèmes

$$(S):\begin{cases}2x-y+z=1\\3x-y-2z=1\\x+2y-17z=1\end{cases}\qquad (S'):\begin{cases}2x-y+z=1\\3x-y-2z=2\\x+2y-17z=3\end{cases}$$

2. La matrice A est-elle inversible ?
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels a,b,c pour que le système

$$\begin{cases}2x-y+z=a\\3x-y-2z=b\\x+2y-17z=c\end{cases}$$

admette au moins une solution, et décrire l'ensemble des solutions lorsque cette condition est remplie.

Exercice 15. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles en précisant, si c'est le cas, leur inverse.

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&-3\\-1&0&2\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&0&2\\3&0&1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\-1&2&1\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

Exercice 16. Considérons les matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1&4&8\\0&-3&-4\\0&2&3\end{pmatrix}\text{ et }P=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&0&2\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer la matrice $D=PAP^{-1}$. *Indication :* c'est une matrice diagonale.
3. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} à l'aide de P, P^{-1} et d'une matrice diagonale dont on précisera les coefficients.
4. Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $D^n=PA^nP^{-1}$.
5. En déduire une expression de A^n en fonction de P, P^{-1} et d'une matrice diagonale dont on précisera les coefficients.

Exercice 17. Résoudre, en fonction du paramètre $\lambda\in\mathbb{R}$, les systèmes linéaires d'inconnues $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ suivants

$$(S_1):\begin{cases}3x+y-z=1\\x-2y+2z=\lambda\\x+y-z=1,\end{cases}\qquad (S_2):\begin{cases}x+y+z=\lambda+1\\2x-y-z=\lambda\\x-2y-2z=3\lambda,\end{cases}$$

$$(S_3):\begin{cases}x-y+z=\lambda\\x+\lambda y-z=1\\x-y-z=1.\end{cases}$$