TD 8 : convergence de suites

1 Convergence et calcul de limites

Exercice 1. Soient u et v deux suites telles que $u+v$ et $u-v$ convergent. Montrer que u et v convergent.

Exercice 2. Soit u une suite d'entiers relatifs. Montrer que u converge si, et seulement si, elle est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 3. Déterminer par comparaison la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n+(-1)^{n+1}}$
2. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$
3. $u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$
4. $u_n = \dfrac{e^n}{n^n}$
5. $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$

Exercice 4. Soient u et v deux suites d'éléments de $[0,1]$ telles que uv converge vers 1. Montrer que u et v convergent, et déterminer leur limite.

Exercice 5. Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$
2. $u_n = \sqrt{n^2+n+1}-n$
3. $u_n = \dfrac{3n-2n^3}{n^2+1}$
4. $u_n = \dfrac{(n+2)!}{(2n^2+1)n!}$.
5. $u_n = \dfrac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$
7. $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
8. $u_n = \sqrt[n]{n^2}$
9. $u_n = \sin\left(n\pi + \dfrac{1}{n}\right)$
10. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)^{1/n}$

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

1. Montrer que si $l<1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Montrer que si $l>1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3. Avec des exemples de suites explicites, montrer que si $l=1$, on ne peut a priori rien dire sur le comportement de la suite (u_n).

Exercice 7. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0=0$, $v_0=1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2+v_n^2}{2}}.$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$ et $v_n > 0$.
2. Soit n un entier naturel. Montrer que
$$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \frac{(u_n-v_n)^2}{4}$$
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$.
4. Montrer, à l'aide des résultats précédents, que la suite (u_n) est croissante.
5. Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2 et en déduire le sens de variation de (v_n).
6. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes. On note ℓ la limite de (u_n) et ℓ' celle de (v_n).
7. Montrer, à l'aide d'un passage à la limite, que $\ell = \ell'$.

Exercice 8. Soit (u_n) une suite d'entiers naturels distincts deux à deux. Montrer que (u_n) tend vers $+\infty$.

2 Suites monotones et adjacentes

Exercice 9. Soit (u_n) une suite croissante telle que la suite (u_{2n}) converge. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 10. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 11. Pour $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}.$$

1. Écrire u_n à l'aide de factorielles.
2. En étudiant sa monotonie, montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 12 (Irrationnalité de e)**.** On pose, pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

1. Montrer que u_n et v_n sont strictement monotones, et qu'elles sont adjacentes.
2. On admet que u_n et v_n convergent vers e, la constante d'Euler. On va montrer que e est irrationnel : supposons que $e=\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers. Obtenir une absurdité en considérant $q!u_q$, $q!e$, et $q!v_q$.

3 Suites définies par récurrence

Exercice 13. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + u_n^2.$$

Exercice 14. En fonction de $u_0 \in \mathbb{R}$, étudier le comportement de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_{n+1} = e^{u_n} - 1.$$

Exercice 15. Soit $u_0 \in]0,1[$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

Montrer que u_n décroît vers 0. En déduire les limites des suites de termes généraux

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^2, \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n} (1 - u_k).$$

Exercice 16. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence :

$$u_0 > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}.$$

1. Montrer que (u_n) est bien définie, et justifier qu'elle admet une unique limite possible notée l.
2. On considère la suite v définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = |u_n - l|$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} \leqslant \frac{1}{4} v_n.$$
3. En déduire la convergence de u.

Exercice 17. Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$u_0 \in [-2, 2], \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

1. Montrer que (u_n) est bien définie.
2. En supposant que (u_n) converge, quelle peut être sa limite ?
3. Montrer que la suite $(|u_n - 1|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît, puis qu'elle est convergente vers $\alpha \geqslant 0$.
4. Supposons que $\alpha > 0$. Montrer qu'alors, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2 - u_n} + 1 = 1$, et arriver à une contradiction. En conclure que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.