TD 9 : polynômes

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant des polynômes suivants.
1. $P = (X+2)^3 - (X-1)^3$.
2. $P = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^{k+1}$.
3. $P = X^{2n} - (X-1)^n(X+1)^n$.
4. $P = (X+1)^3(X-2)(X+3)^2$

Exercice 2.
1. Déterminer les polynômes à coefficients réels P vérifiant
$$P(X^2) = (X^2+1)P.$$
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$P \circ P = P.$$

Exercice 3. Quels sont les polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ qui vérifient $P^2 = XQ^2$?

Exercice 4. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes définie par
$$P_1 = X - 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1} = P_n^2 - 2.$$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner le degré, le coefficient dominant, et le coefficient constant de P_n. Déterminer ensuite le coefficient devant X dans P_n.

Exercice 5. On définit une suite de polynômes (P_n) par $P_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$P_{n+1} = P_n + \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(X+k)$$
1. Écrire P_1, P_2 et P_3 sous forme factorisée.
2. Conjecturer puis démontrer par récurrence la forme factorisée de P_n.

Exercice 6. Soient n et $m \in \mathbb{N}$.
1. Donner une expression développée des polynômes $(1+X)^n$, $(1+X)^m$ et $(1+X)^{n+m}$.
2. Montrer que si l'on note (a_k) les coefficients de P et (b_k) ceux de Q, alors le coeff. de degré ℓ de PQ est $\sum_{k=0}^{\ell} a_k b_{\ell-k}$.
3. Démontrer, à l'aide des questions précédentes, que pour tout $\ell \in [\![0, m+n]\!]$,
$$\binom{n+m}{\ell} = \sum_{k=0}^{\ell}\binom{n}{k}\binom{m}{\ell-k}.$$
Remarque. Cette égalité s'appelle l'identité de Vandermonde

Exercice 7. Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :
1. $A = X^3 - 3X^2, \quad B = X^2 - X + 2$.
2. $A = -16X^4 - 64X^2 - 100, \quad B = 4X^2 + 4X + 10$.
3. $A = X^4 - 3X^3 + 2X^2 + 2, \quad B = 2X^3 - X^2 + 4X - 4$.
4. $A = X^3 + iX^2 + X, \quad B = X - i + 1$.

Exercice 8. Effectuer la division euclidienne par
$$B = X^2 - 2X - 2$$
du polynôme
$$P = 2X^4 - 4X^3 - 7X - 14.$$
En déduire la valeur de $P(1+\sqrt{3})$.

Exercice 9. On note S l'ensemble des couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $B = X^2 - 4X + 3$ divise
$$A = X^4 - 4X^3 + aX^2 - 4X + b.$$
1. Poser la division euclidienne de A par B, puis en déduire S.
2.
   a. Déterminer les racines de B et donner sa forme factorisée.
   b. Justifier que B divise A si et seulement si les racines de B sont des racines de A.
   c. Retrouver le résultat de la question 1.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver le reste dans la division euclidienne de X^n par $X+1$.

Exercice 11. Pour un entier $n \geqslant 2$, on note
$$P = (1+X)(1-X^n) + (2-n)X^n - n^2X^n(1-X) + n - 2.$$
1. Donner l'expression de tous les coefficients de P et son degré.
2. Montrer que 1 est une racine double de P.

Exercice 12. Soit $n \geqslant 2$, on note $P_n = X^n - 4X + 1$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P_n par A dans les cas suivants.
1. $A = X^2 + X - 2$.
2. $A = (X-1)^2$.
3. $A = X^3 - 2X^2 - X + 2$.

Exercice 13. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. À l'aide d'un raisonnement sur les racines, montrer que
1. $X^2 - 3X + 2$ divise $X^n - 2X^{n-1} - X + 2$.
2. $(X-1)^2$ divise $X^{2n} - 2X^{n-1} - 2X + 3$.

Exercice 14. Déterminer la multiplicité de la racine 1 pour les polynômes suivants :

$$P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$$
$$Q = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1.$$

Exercice 15. On note

$$P = X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 5X + 2.$$

1. Calculer les dérivées successives de P.
2. Montrer que P admet une racine de multiplicité 3.
3. En déduire la forme factorisée de P.

Exercice 16. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P = X^4 - 1$
2. $Q = (X^2 - X + 1)^2 + 1$
3. $R = X^8 - 2\cos(2a)X^4 + 1$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 17. Factoriser le polynôme $P = X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 18. Déterminer tous les polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P = P'P''$.

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

Montrer que P n'admet pas de racine multiple.

Exercice 20. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg(P) \geqslant 2$. On suppose que P' divise P. Montrer qu'alors, P'' divise P'. En déduire tous les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivé.zz

Exercice 21. On définit la suite de polynômes (T_n), appelés polynômes de Tchebychev, par

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Calculer T_2, T_3 et T_4.
2. Montrer, à l'aide d'une récurrence double, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.
3. Déterminer une expression du coefficient dominant de T_n en fonction de n.
4. a. Montrer que pour a et $b \in \mathbb{R}$, on a $\cos(a+b) - \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$.

   b. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$.

   c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k = \cos\big(\frac{1+2k}{2n}\pi\big)$ est une racine de T_n.

   d. Conclure que $T_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$.