TD 10 : Limites, continuité, études de fonctions

1 Limites

Exercice 1. Calculer les limites des expressions suivantes (si elles existent) :

$$\frac{x^2+2|x|}{x} \text{ quand } x \to 0 \text{ et } +\infty,$$

$$\frac{e^{2x}\ln\left(x^3\right)}{x^4} \text{ quand } x \to +\infty \text{ et } 0^+,$$

$$\frac{\ln(x^2+e^{2x})-x}{\sqrt{x}} \text{ quand } x \to +\infty,$$

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{3x^2+1}-2} \text{ quand } x \to 1 \text{ et } +\infty,$$

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^x \text{ quand } x \to 0^+ \text{ et } +\infty,$$

$$\frac{x-\sqrt{e^x}}{\ln(x^2)+x} \text{ quand } x \to +\infty,$$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \text{ quand } x \to 0^+ \text{ et } +\infty,$$

$$\ln(2x+1)-\ln(x-1) \text{ quand } x \to +\infty,$$

$$\frac{\cos(x)+x}{\cos(x)-x} \text{ quand } x \to +\infty,$$

$$\ln(x)\ln\big(\ln(x)\big) \text{ quand } x \to 1^+,$$

$$\sqrt{x}\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \text{ quand } x \to 0^+,$$

$$x-\lfloor x\rfloor \text{ quand } x \to +\infty.$$

Exercice 2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_n = n\pi$ et $v_n = \frac{\pi}{2}+2n\pi$, et f la fonction définie par $f(x) = \sin(x)$.

1. Calculer la limite des suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que f n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$. On suppose de plus que f admet une limite finie en 0. Montrer que f est constante.

Exercice 4. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-périodique et admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que g est constante.

2 Continuité, prolongement par continuité

Exercice 5. Soient a un réel et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \geqslant 0, \\ |x+a| & \text{si } x < 0. \end{cases}$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a la fonction f est-elle continue ?
2. Tracer les graphes obtenus pour ces valeurs.

Exercice 6. Justifier, là où c'est possible, la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes.

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{e^x}{x} \text{ si } x > 0, \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0, \end{cases} \qquad g : x \mapsto \begin{cases} -x^2 \text{ si } x \leqslant 0, \\ x\ln(x) \text{ si } 0 < x \leqslant e, \\ \frac{\exp(\frac{x}{e})-e}{\frac{x}{e}-1} \text{ si } x > e, \end{cases}$$

$$h : x \mapsto x-\lfloor x\rfloor-(x-\lfloor x\rfloor)^2.$$

Exercice 7. Donner le domaine de définition puis les éventuels prolongements par continuité des fonctions suivantes.

$$f : x \mapsto \sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$g : x \mapsto \frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2},$$

$$h : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2-1}.$$

Exercice 8. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xE(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x)-1| \leqslant |x|$.
2. En déduire que f est continue en 0.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$ Étudier la continuité de f.

Exercice 10. Pour tout $x \in]0,1]$, on définit $f(x) = (1-x)\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$. La fonction f peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?

3 TVI et conséquences

Exercice 11.
1. Montrer que toute fonction continue ne s'annulant pas sur un intervalle y garde un signe constant.
2. Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels possède au moins une racine réelle.
3. Déterminer toutes les fonctions continues définies sur un intervalle I telles que $\forall x \in I,\ f(x)^2 = 1$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.
5. Montrer que l'équation $E : \mathrm{Arctan}(x) + x + 1 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation $(E_n) : \ln(x) + x = n$. On pose $f_n(x) = \ln(x) + x - n$
1. Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, (E_n) admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+^\star$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est croissante.
3. Déterminer la limite de (x_n).

Exercice 13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation $(E_n) : \tan(nx) = \frac{1}{2x}$, d'inconnue $x \in]0, \frac{\pi}{2n}[$.
1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation (E_n) admet une unique solution, que l'on notera x_n.
2. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie.

Exercice 14. Soit $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{Arctan}(x)$.
1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel x_n tel que $f(x_n) = n$.
3. Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie.

Exercice 15. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $x \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$.

4 Dichotomie

Exercice 16. Étude de la fonction polynomiale $P : x \mapsto x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 3x - 1$ et de ses racines.
1. Dresser son tableau de variations de P.
2. Justifier que l'équation $P(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet exactement trois solutions distinctes.
3. À l'aide d'une dichotomie (et éventuellement d'une calculatrice), déterminer un encadrement de largeur au plus 0,1 de la plus grande racine de P.

5 Études de fonctions

Exercice 17. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{(1+x)^2}$.
1. Déterminer le domaine de définition de f que l'on notera $\mathcal{D}$.
2. Préciser le signe de f ainsi que ses limites au bord de $\mathcal{D}$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathcal{D},\ f'(x) = \frac{u(x)}{x(1+x)^3}$ avec une fonction u à préciser.
4. Dresser le tableau de variations de u avec les limites au bord de son domaine.
5. En déduire que la fonction u s'annule une unique fois, en un réel que l'on notera α.
6. Donner finalement le tableau de variations de f.

Exercice 18. On étudie $f : x \mapsto (x-1)\exp\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.
1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer les limites aux bords du domaine de définition. La fonction f peut-elle être prolongée par continuité ?
3. Calculer la dérivée de f, et vérifier que pour tout $x \neq 1$, $f'(x)$ est du signe de $\frac{x-2}{x-1}$.
4. Donner le tableau de variations de f et représenter l'allure de son graphe.

Exercice 19. Effectuer la division euclidienne de $A = X^3 - 2X^2 + 3X + 2$ par $B = X^2 - X + 3$. En déduire une asymptote à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3-2x^2+3x+2}{x^2-x+3}$, dont on précisera le domaine.

Exercice 20. On définit $f(x) = \dfrac{4x+2}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21. On définit $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} - 1 + \dfrac{x}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$ et $f(0) = 0$.
1. Montrer que f est paire et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer ses asymptotes en $\pm\infty$ et représenter l'allure de son graphe.

6 Suites définies avec des fonctions

Exercice 22. Soit $f : x \mapsto \frac{2}{3}x + x^2$ et (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.
3. Représenter dans un même repère le graphe de f ainsi que la droite d'équation $y = x$.
4. Montrer que si $u_0 \in]0, \frac{1}{3}[$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{3}$ et la suite (u_n) est décroissante.
5. Étudier de même les variations de (u_n) dans les cas $u_0 = 0$, puis $u_0 = \frac{1}{3}$ et enfin $u_0 > \frac{1}{3}$.
6. On suppose que (u_n) converge. Quelles sont les valeurs possibles pour la limite ?
7. En distinguant les cas selon la valeur de u_0, déterminer la limite de (u_n).

Exercice 23. Pour tout entier $n \geqslant 3$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. Soit $n \geqslant 3$.
   a. Étudier la fonction f_n et dresser son tableau de variations complet.
   b. En déduire l'existence de deux réels u_n et v_n tels que $f_n(u_n) = f_n(v_n) = 0$ et $u_n < n < v_n$.
   c. Montrer que $1 < u_n < \mathrm{e}$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et qu'elle converge.
4. Déterminer la limite de (u_n).