TD 11 : Applications entre ensembles et dénombrement

1 Ensembles et applications

Exercice 1. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ pour $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$?

Exercice 2. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on définit $f(n) = 2n$ et $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

1. Vérifier que f et g sont des applications définies de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
2. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $g(0)$, $g(1)$ et $g(2)$.
3. Étudier les propriétés d'injectivité et de surjectivité de f, de g, de $g \circ f$ et de $f \circ g$.

Exercice 3. Soient $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to E$ des applications telles que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Montrer que f est surjective et que g est injective.

Exercice 4. Soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

2 Surjectivité et injectivité des fonctions réelles ou complexes

Exercice 5. Soit f une application d'un intervalle Ide $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, supposée strictement croissante. Montrer que f est injective.

Exercice 6. Pour les fonctions suivantes, dire si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2x+3y \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x}{1+x^2} \end{array} \qquad i : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z}{1+|z|} \end{array}$$

Exercice 7. Montrer que les fonctions suivantes sont bijectives et déterminer leur application réciproque.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [4,+\infty[\\ x & \mapsto & 3+\sqrt{1+\mathrm{e}^{x-2}} \end{array} \qquad i : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x}{1-x^2} \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y,-y) \end{array} \qquad j : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\{2i\} & \to & \mathbb{C}\backslash\{2i\} \\ z & \mapsto & \frac{i-2z}{2+iz} \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+3y, x-y) \end{array}$$

Exercice 8 (Bijections composées)**.** On considère $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \frac{x-1}{x+1} \end{array}$.

1. Montrer que g est bijective et déterminer g^{-1}.
2. En déduire que f est bijective et l'expression de f^{-1}.

3 Dénombrabilité

Exercice 9.
1. Montrer que la fonction suivante définit une bijection :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ c & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{array}$$

2. Montrer que $\mathbb{N}^\star$ et $\{2k, k \in \mathbb{N}\}$ sont dénombrables.

Exercice 10. Soit E un ensemble infini tel qu'il existe une surjection $f : \mathbb{N} \to E$. On va construire une bijection $g : \mathbb{N} \to E$ par récurrence : on définit $g(0) = f(0)$ et pour $n \geqslant 0$, $g(n+1) = f(k_n)$, où k_n est défini par

$$k_n = \min\{k \in \mathbb{N}, f(k) \notin \{g(0), \cdots, g(n)\}\}.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner le cardinal de l'ensemble $\{g(0), \cdots, g(n)\}$ et en déduire que k_n est bien défini en utilisant la surjectivité de f.
2. Montrer que la suite d'entiers (k_n) est strictement croissante. En déduire sa limite.
3. Grâce à la définition de k_n, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f([\![0, k_{n-1}]\!]) \subset g([\![0, n]\!])$. En déduire que g est surjective.
4. Montrer que g est injective.

Moralité : pour montrer qu'un ensemble infini E est dénombrable, il suffit d'exhiber une surjection de $\mathbb{N}$ sur E.

Exercice 11. Grâce à l'exercice précédent, montrer que toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
Indication : on pourra construire une surjection de $\mathbb{N}$ dans cette partie qui envoie tous les éléments n'appartenant pas à cette partie sur un même point.
En déduire que si E est un ensemble infini tel qu'il existe une injection $f : E \to \mathbb{N}$, alors E est dénombrable.

Exercice 12. En utilisant que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, montrer que le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est encore dénombrable. Montrer que $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star & \to & \mathbb{Q} \\ (q,p) & \mapsto & \frac{q}{p} \end{array}$ est une surjection et en déduire que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

4 Dénombrement

Exercice 13. Pour k et $n \in \mathbb{N}$, quel est le nombre de chemins à k « succès » dans un arbre binaire de longueur n ?

Exercice 14 (Situations de tirages « aléatoires »)**.** Quel est le nombre d'issues possibles lors d'un tirage de k éléments dans un ensemble à n éléments :

1. avec ordre et avec remise ?
2. avec ordre et sans remise ?
3. sans ordre et sans remise ?

Exercice 15. Soient a, b, c des réels. Quel est le nombre de $a^2b^3c^4$ dans le développement de $(a+b+c)^9$? Généraliser le résultat pour la puissance n-ième de p réels.

Exercice 16. On note k et n deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$.

1. Montrer, à partir de la formule explicite des coefficients du binome, que pour tout $i \in [\![k, n]\!]$,
$$\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}.$$
2. Donner une interprétation en terme de dénombrement de la formule précédente.
3. En déduire que pour tout réel x, on a $\displaystyle\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}x^{n-i} = \binom{n}{k}(1+x)^{n-k}$.

Exercice 17.
1. Pour $p \leqslant n$, combien y a-t-il d'injections de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?
2. Pour $p \leqslant n$, combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

Exercice 18. Soit E un ensemble à n éléments et A un sous-ensemble de E de cardinal $p \leqslant n$.

1. Combien y a-t-il de parties de E disjointes de A ?
2. Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties disjointes de E ?
3. Combien y a-t-il de parties de E contenant A ?
4. Combien y a-t-il de parties de E à m éléments contenant A, pour m dans $[\![p, n]\!]$?
5. Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E dont l'intersection est exactement A ?

Exercice 19 (Dérangements)**.** On appelle *dérangement* une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ sans point fixe, c'est-à-dire telle que
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \sigma(k) \neq k.$$
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note d_n le nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$, et on pose par convention $d_0 = 1$.

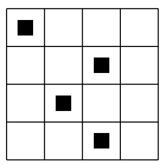
1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_{n-k}.$$
2. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k!.$$

Exercice 20. On a une urne avec 5 boules rouges (numérotées de 1 à 5) et 3 blanches (numérotées de 1 à 3).

1. On tire successivement (donc en tenant compte de l'ordre) et avec remise trois boules de l'urne.
   a. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
   b. Combien de tirages avec que des boules rouges ? que des boules blanches ?
   c. Combien de tirages avec une boule blanche et deux rouges ?
2. On tire successivement, mais sans remise, trois boules dans l'urne.
   a. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
   b. Combien de tirages avec que des boules rouges ? que des boules blanches ?
   c. Combien de tirages avec une boule blanche et deux rouges ?

Exercice 21. On dispose d'une grille de 4×4 cases. On place aléatoirement 4 jetons identiques dans la grille.

1. Combien y-a t'il de positionnements possibles pour les 4 jetons ?
2. Combien de positionnements sans jeton dans les coins ?
3. Combien de positionnements sans que 2 jetons soient dans la même colonne ?
4. Combien de positionnements où les jetons sont alignés ?
5. Qu'est ce que cela change si les jetons sont de quatre couleurs différentes ?



Exemple de grille