

## TD 13 : Espaces vectoriels I

### 1 Sous-espaces vectoriels

**Exercice 1.** Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de  $(E, +, \cdot)$  :

1.  $E = \mathbb{R}$ 
  - a.  $A = \mathbb{Q}$
  - b.  $B = \mathbb{R}_+$
2.  $E = \mathbb{R}^2$ 
  - a.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$
  - b.  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$
  - c.  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$
3.  $E = \mathbb{C}$ 
  - a.  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$  (le disque trigo)
  - b.  $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$  (les imaginaires purs)
  - c.  $C = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}\}$
4.  $E = \mathbb{R}[X]$ 
  - a.  $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = n\}, n \in \mathbb{N}$
  - b.  $B = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 2\}$
  - c.  $C = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid XP' - P = 0\}$
5.  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 
  - a.  $A$  l'ensemble des fonctions  $2\pi$ -périodiques.
  - b.  $B$  l'ensemble des fonctions bornées.
  - c.  $C$  l'ensemble des fonctions impaires.
  - d.  $D$  l'ensemble des fonctions dérivables.
  - e.  $E$  l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + y' + y = 1.$$

$$f. F = \left\{ f \in E \text{ continue} \mid \int_0^1 f(x)dx = 0 \right\}.$$

**Exercice 2.** Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels usuels.

1.  $A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^2 = 0\}$ .
2.  $B = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r\}$  (ensemble des suites arithmétiques).
3.  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$ .
4.  $D = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)\}$  (ensemble des fonctions croissantes sur  $\mathbb{R}$ ).
5.  $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n\}$  (ensemble des suites géométriques).
6.  $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$

**Exercice 3.** Montrer qu'un sous-espace vectoriel de  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  non réduit à 0 est égal à  $\mathbb{R}$ .

### 2 Familles génératrices, familles liées, bases

**Exercice 4.** Combinaisons linéaires dans différents espaces vectoriels.

1. Est-ce que  $P = X^3 + 2X^2 - X$  est une combinaison linéaire de  $P_1 = X^3 - X$ ,  $P_2 = X^2 + 2X - 2$  et  $P_3 = 2X - 1$  ?
2. Est-ce que  $u = (1, 2, -1)$  est une combinaison linéaire  $v_1 = (1, 0, 1)$ ,  $v_2 = (0, 1, -1)$  et  $v_3 = (1, 1, 0)$  ?
3. Est-ce que  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  est une combinaison linéaire des matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

**Exercice 5.** Sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  : déterminer une famille génératrice des ensembles de solutions des systèmes linéaires homogènes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ 2x + y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

**Exercice 6.** Montrer que les ensembles suivants sont chacun un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel usuel, puis en déterminer une famille génératrice.

1.  $F_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) + P'(1) = 0\}$ .
2.  $F_2 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid MA = AM\}$  avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 7.** Pour chacune des familles  $\mathcal{F}$  de vecteurs ci-dessous, déterminer si elle est libre et/ou génératrice de l'espace vectoriel  $E$ .

Si la famille est liée, donner explicitement une relation linéaire entre les vecteurs. Si elle n'est pas génératrice, donner explicitement un vecteur de  $E$  qui n'est pas combinaison linéaire de la famille.

1.  $E = \mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$  avec  $u_1 = (1, 1, 1)$ ,  $u_2 = (1, 2, 1)$  et  $u_3 = (0, 1, 1)$ .
2.  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{F} = (A, B, C)$  avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .
3.  $E = \mathbb{R}_2[X]$  et  $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$ , avec les polynômes  $P_1 = X^2 + 2X - 1$ ,  $P_2 = X - 1$  et  $P_3 = X^2 + 1$ .
4.  $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{F} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ , avec

$$(X_1, X_2, X_3, X_4) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

**Exercice 8.** Exemples de base dans des espaces vectoriels usuels.

- On note  $E = \mathbb{R}_2[X]$  l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2.
  - Montrer que la famille  $(X + 1, X - 1, X^2 - 1)$  est une base de  $E$ .
  - Donner les coordonnées dans cette base du polynôme  $X^2$ .
- On note  $E = \mathbb{R}^4$  et  $u_1 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1, 0, 1)$ ,  $u_3 = (-1, 1, 1, -1)$  et  $u_4 = (0, 0, 1, 1)$ .
  - Montrer que  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  est une base de  $E$ .
  - Donner les coordonnées  $(1, 2, 3, 4)$  dans cette base.

**Exercice 9.** On définit les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  suivants :  $u_1 = (1, 1, 1)$ ,  $v_1 = (1, 0, -1)$ ,  $u_2 = (0, 1, 2)$ ,  $v_2 = (2, 1, 0)$ .

- Montrer que  $u_1$  et  $v_1$  sont des combinaisons linéaires de la famille  $(u_2, v_2)$ .
- En déduire que  $\text{Vect}(u_1, v_1) \subset \text{Vect}(u_2, v_2)$ .
- Montrer finalement que  $\text{Vect}(u_1, v_1) = \text{Vect}(u_2, v_2)$ .
- On cherche à retrouver le résultat de la question 3. par une autre méthode.
  - Pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , déterminer à quelle condition le vecteur  $(x, y, z)$  est combinaison linéaire de  $(u_1, v_1)$ .  
*Indication :* en résolvant, sous forme de système d'inconnues  $\alpha$  et  $\beta$ , l'équation  $\alpha u_1 + \beta v_1 = (x, y, z)$  on obtient une condition de compatibilité.
  - En déduire que  
$$\text{Vect}(u_1, v_1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}.$$
  - Faire de même pour  $\text{Vect}(u_2, v_2)$  et retrouver ainsi le résultat de la question 3.

**Exercice 10.**

- Justifier que l'ensemble  $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
- Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on note  $S_a = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + af(x) = 0\}$ 
  - Montrer que  $S$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
  - Montrer que si  $f \in S$ , alors  $g : x \mapsto e^{ax} f(x)$  est une fonction constante.
  - Conclure que  $S = \text{Vect}(x \mapsto e^{-ax})$

**Exercice 11.** Soit  $E$  un espace vectoriel, et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- Montrer que  $F \cap G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- On suppose que  $F \cap G = \{0_E\}$ . Montrer que pour tout  $u, u' \in F$  et  $v, v' \in G$ ,

$$u + v = u' + v' \implies u = u' \text{ et } v = v'.$$

**Exercice 12.** Soit  $E$  un espace vectoriel,  $n \in \mathbb{N}$ , et  $(v_1, \dots, v_n)$  une famille de vecteurs de  $E$  et  $u \in E$ .

- Montrer que si  $u \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$  alors  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n, u) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ .
- Montrer que si  $(v_1, \dots, v_n)$  est libre et  $u \notin \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ , alors  $(v_1, \dots, v_n, u)$  est libre.  
*Indication :* démontrer la contraposée, c'est à dire supposer que  $(v_1, \dots, v_n, u)$  est liée et conclure que
- On suppose maintenant que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ . Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $u_k = \sum_{i=1}^k e_i$ .
  - Montrer par récurrence, pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , que  $(u_1, \dots, u_k)$  est libre.
  - Montrer par récurrence que  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
  - En déduire que  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $E$ .

**Exercice 13.** On note  $u, v, w$  les trois suites réelles définies pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = 1$ ,  $v_n = 2^n$  et  $w_n = 3^n$ .

- Soit  $\alpha, \beta$  et  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{-n}(\alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n) = \gamma$
- Montrer, en s'inspirant du résultat précédent, que la famille  $(u, v, w)$  est libre.
- On note  $F = \text{Vect}(u, v, w)$ . Montrer qu'il existe une unique suite  $(x_n) \in F$  telle que  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$  et  $x_2 = 6$  et donner son terme général.

### 3 Applications linéaires

**Exercice 14.** Pour chacune des applications définies ci-dessous, déterminer si elle est linéaire. Si c'est le cas, donner une famille génératrice de son image et de son noyau.

- $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y + 1, 2y - 1) \end{cases}$
- $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y - z, x - 2y + z) \end{cases}$
- $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) \mapsto P(X + 1) - P(X) \end{cases}$
- $f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto xyz \end{cases}$
- $f_5 : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ P \mapsto (P(2), P'(1)) \end{cases}$
- $f_6 : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto \frac{1}{2}(M + M^t) \end{cases}$

**Exercice 15.** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini, pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , par

$$f((x, y, z)) = \frac{1}{2}(x + y + z, 2y, x - y + z).$$

1. Pour  $u \in \mathbb{R}^3$  un vecteur de votre choix, calculer  $f(u)$  puis  $f(f(u))$ . Généraliser en démontrant que  $f \circ f = f$ .
2. Déterminer  $v_1 \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(v_1)$ .
3. Déterminer  $v_2$  et  $v_3 \in \mathbb{R}^3$  tels que  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(v_2, v_3)$ . Calculer  $f(v_2)$  et  $f(v_3)$ .
4. Vérifier que  $(v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  que l'on note  $\mathcal{B}$ .
5. Pour un vecteur  $u \in \mathbb{R}^3$ , déterminer les coordonnées de  $f(u)$  dans la base  $\mathcal{B}$  en fonction de celles de  $u$  dans  $\mathcal{B}$ .

**Exercice 16.** On considère l'application linéaire  $f$  définie par

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto (P(-1), P(0), P(1)). \end{cases}$$

1. Déterminer le noyau de  $f$ . *Indication* : penser à la relation entre nombre de racines et degré.
2. Montrer que  $(f(1), f(X), f(X^2))$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ .
3. En déduire que  $f$  est un isomorphisme.
4. Déterminer  $P_1 = f^{-1}((1, 0, 0))$ ,  $P_2 = f^{-1}((0, 1, 0))$  et  $P_3 = f^{-1}((0, 0, 1))$ .
5. En déduire une expression générale pour  $f^{-1}((x, y, z))$ , où  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

**Exercice 17.** On note  $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et  $f$  l'endomorphisme de  $E$  défini par

$$f : X \mapsto AX \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note  $F$  l'ensemble des vecteurs invariants par  $f$ , c'est à dire  $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid f(X) = X\}$ .

1. Déterminer  $\text{Ker}(f)$ . Que peut-on en déduire pour  $f$ ? On admet que  $f$  est aussi surjective.
2. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
3. Déterminer deux vecteurs  $X_1$  et  $X_2$  tels que  $F = \text{Vect}(X_1, X_2)$ .
4. Soit  $Y \in E$ . Montrer que  $f(Y) = 2Y$  si et seulement si  $Y \in \text{Vect}(X_3)$ , avec  $X_3$  un vecteur à préciser.
5. Montrer que  $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$  est une base de  $E$ .
6. Pour un vecteur  $X \in E$ , donner les coordonnées de  $f(X)$  dans  $\mathcal{B}$  en fonction des coordonnées de  $X$  dans  $\mathcal{B}$ .

7. En déduire une expression de  $f^{-1}(Y)$  pour  $Y \in E$  à l'aide des coordonnées dans  $\mathcal{B}$ .

**Exercice 18.** On définit les vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  suivants :  $u_1 = (1, 0, 1)$ ,  $u_2 = (1, -1, 1)$ ,  $u_3 = (-2, 1, -1)$ .

1. Montrer que  $(u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Soit  $v_1, v_2, v_3$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Montrer qu'il existe au plus une application  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  telle que  $f(u_1) = v_1$ ,  $f(u_2) = v_2$  et  $f(u_3) = v_3$ .  
*Indication.* On pourra supposer qu'il existe deux applications  $f_1$  et  $f_2$  qui vérifient les égalités ci-dessus et montrer qu'alors  $f_1 - f_2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$  en utilisant la décomposition d'un vecteur dans la base  $(u_1, u_2, u_3)$ .
3. Pour  $v_1 = (1, 0, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, 0)$  et  $v_3 = (0, 0, 1)$  déterminer explicitement une telle application  $f$ .

**Exercice 19.** Soient  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels,  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$  une famille de vecteurs de  $E$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. Montrer que si  $(f(u_1), \dots, f(u_n))$  est libre, alors  $\mathcal{F}$  est une famille libre.
2. Montrer que si  $(f(u_1), \dots, f(u_n))$  est génératrice de  $F$  et  $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ , alors  $\mathcal{F}$  est génératrice de  $E$ .
3. Montrer que si  $\mathcal{F}$  est libre et  $\text{Ker}(f) \cap \text{Vect}(\mathcal{F}) = \{0_E\}$ , alors  $(f(u_1), \dots, f(u_n))$  est libre.

**Exercice 20.** Soient  $E$  un espace vectoriel et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ .

1. Montrer que :  $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ .
2. Montrer que :  $f \circ g = g \circ f \implies \forall u \in \text{Ker}(f), g(u) \in \text{Ker}(f)$  et  $\forall v \in \text{Im}(f), g(v) \in \text{Im}(f)$ .  
*Cela signifie que si  $f$  et  $g$  commutent, alors le noyau et l'image de  $f$  sont stables par  $g$ .*
3. Montre que :  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$  et  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ .
4. Montrer que :  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g \circ f) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{0_E\}$ .

**Exercice 21.** On note  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  l'espace vectoriel des suites réelles et  $f$  l'application qui a une suite  $(u_n)$  de  $E$  associe la suite  $(v_n)$  définie par  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1}$ .

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Est-il injectif? surjectif?
3. Déterminer  $g$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f \circ g = \text{Id}_E$ .
4. Peut-on trouver  $h$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $h \circ f = \text{Id}_E$ ?