TD 14 : Probabilités finies

1 Probabilités classiques

Exercice 1. Dix paires de chaussures sont toutes rangées dans un placard. On prend au hasard 4 chaussures. Quelle est la probabilité :

1. d'obtenir deux paires de chaussures ?
2. d'obtenir au moins une paire de chaussures ?
3. d'obtenir une et une seule paire de chaussures ?

Exercice 2. Une urne contient 5 boules blanches et 10 boules noires indiscernables au touché.

1. On tire successivement et avec remise trois boules de cette urne.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir d'abord une boule blanche puis deux boules noires ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche et deux boules noires dans n'importe quel ordre ?
2. Mêmes questions, mais avec un tirage sans remise.
3. On tire simultanément 4 boules de cette urne.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 boules de la même couleur ?

Remarque. On pourra imaginer que les boules sont numérotées pour faciliter le raisonnement.

Exercice 3.

1. Une urne contient M jetons numérotés de 1 à M . On tire successivement n jetons en remettant chaque fois le jeton tiré et en brassant bien. Calculer la probabilité qu'aucun jeton ne soit tiré plus d'une fois.
2. On considère une classe de n élèves, avec $n \leqslant 365$. Quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves aient leur anniversaire le même jour ? (On suppose qu'aucun élève n'est né le 29 février.)
3. Application : à l'aide d'une calculatrice, déterminer à partir de combien d'élèves dans une classe la probabilité que deux élèves aient le même jour d'anniversaire est plus grande que 50%.

Exercice 4. On dispose d'une grille de 4×4 cases. On place aléatoirement 4 jetons identiques dans la grille.

1. Combien de grilles différentes peut-on obtenir ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une grille sans jeton dans les coins ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une grille sans que 2 jetons soient dans la même colonne ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir une grille où les jetons sont alignés horizontalement ou verticalement ?

Exercice 5. Soit n et p deux entiers tels que $1 \leqslant p \leqslant n$. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n et on tire simultanément p boules de cette urne.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'évènement où toutes les boules tirées ont un numéro inférieur ou égal à k, et B_k l'évènement où le plus grand numéro des boules tirées est k.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Montrer que $\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{k!(n-p)!}{(k-p)!n!}$ pour tout $k \in [\![p, n]\!]$, et $\mathbb{P}(A_k) = 0$ si $k < p$.
3. Exprimer l'évènement B_k à l'aide de A_k et A_{k-1}.
4. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(B_k)$.
5. Démontrer à l'aide des questions précédentes que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \frac{(k-1)!}{(k-p)!} = \frac{n!}{p(n-p)!}$.

Exercice 6. On considère une expérience aléatoire pour laquelle est définie deux événements notés A, B. Construire à l'aide de A et B et des opérations ensemblistes (intersection, union, complémentaire) les événements suivants :

1. Les deux évènements A, B sont réalisés.
2. L'un (au moins) des évènements A, B est réalisé.
3. Un seul des évènements A, B est réalisé.
4. Au plus un des événements A, B est réalisé.

Exercice 7. On dispose d'une urne remplie de 7 boules portant les lettres : B, E, E, I, L, R, T. On tire successivement et sans remise les 7 boules, quelle est la probabilité que l'on obtienne le mot LIBERTE ?

2 Probabilités conditionnelles

Exercice 8. On considère $\mathbb{P}$ une probabilité sur un univers Ω, et A, B et C des évènements, c'est à dire A, B, $C \in \mathcal{P}(\Omega)$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.
2. On suppose que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.
   a. Montrer que $\mathbb{P}_{A \cup B}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}_A(B)$.
   b. À quelle condition l'égalité de la question précédente est-elle une égalité ?
3. On suppose de plus que $\mathbb{P}_A(B) \neq 0$. Montrer que $\mathbb{P}_{A \cap B}(C) = \dfrac{\mathbb{P}_A(B \cap C)}{\mathbb{P}_A(B)}$

Exercice 9. On dispose d'un sac de 100 dés cubiques (faces numérotées de 1 à 6) à l'apparence identique, parmi lesquels 20 sont truqués et donne 1 à chaque fois qu'on les lance. Les autres dés sont équilibrés.

1. On choisit un dé au hasard puis on le lance.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir 1 ?
   b. Sachant qu'on a obtenu un 1 en lançant le dé, quelle est la probabilité qu'il soit truqué ?
2. On choisit un dé au hasard puis on effectue n lancers indépendant de ce dé (pour $n \in \mathbb{N}^*$).
   a. Quelle est la probabilité de n'obtenir que des 1 ?
   b. Déterminer la plus petite valeur de n telle que, sachant que l'on a obtenu que des 1, la probabilité que le dé soit truqué soit supérieure à $0,95$.

Exercice 10. À la sortie d'une chaîne de production, la proportion de pièces défectueuses est estimée à 5%. Pour éviter que ces pièces défectueuse ne soient mise en vente, il y un contrôle de qualité qui accepte ou refuse la pièce avec les propriétés suivantes : si la pièce est défectueuse, elle est refusée avec une probabilité de $0,98$. Si la pièce est sans défaut, elle est acceptée avec une probabilité de $0,96$.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. Pour une pièce acceptée, quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?
3. Pour une pièce refusée, quelle est la probabilité qu'elle soit en fait fonctionnelle ? Que pourrait-on faire pour réduire cette probabilité ?

Exercice 11. On dispose d'une pièce de 1€ et d'une pièce de 2€. Lors d'un lancer, la probabilité d'obtenir face est $\frac{1}{2}$ avec la pièce de 1€ et $\frac{2}{3}$ avec celle de 2€ (la pièce de 2€ est donc truquée).

On réalise l'expérience aléatoire suivante : on commence en lançant la pièce de 1€, puis après chaque lancer, si on obtient face on garde la pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce.

On effectue ainsi n lancers ($n \in \mathbb{N}^*$). On admet que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note E_k l'événement « le k-ième lancer à lieu avec la pièce de 1€ », et F_k l'événement « obtenir face au k-ième lancer ».

1. À l'aide de la description de l'expérience, déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{E_k}(F_k)$ et $\mathbb{P}_{\overline{E_k}}(F_k)$
2. On note $p_n = \mathbb{P}(E_n)$ la probabilité de l'événement E_n. Donner la valeur de p_1, puis pour $n \geqslant 1$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. Calculer p_n en fonction de n et donner sa limite quand $n \to +\infty$.

Exercice 12. On lance deux fois un dé équilibré et on considère les évènements : A_k : « la somme des deux lancers est k »pour $k \in [\![2, 12]\!]$ et B : « le premier lancer donne 4 ».

1. Calculer $P(A_6)$, $P(A_7)$ et $P(A_8)$.
2. Calculer $P_B(A_k)$ pour tout $k \in [\![2, 12]\!]$.
3. Déterminer si les évènements B et A_6 sont indépendants, et de même pour B et A_7.

Exercice 13. On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3 telles que : U_1 contient 2 boules noires et 1 boule rouge ; U_2 contient 1 boule noire et 4 boules rouges ; U_3 contient 3 boules noires et 4 boules rouges.

1. On tire au hasard une boule dans U_1 et une boule dans U_2, puis on les ajoute à U_3. On tire alors une boule de U_3. Elle est noire. Quelle est la probabilité que la boule que l'on a tirée de U_1 soit rouge ?
2. On tire une boule de U_1 que l'on ajoute à U_2. Ensuite, on tire simultanément 2 boules de U_2 que l'on ajoute à U_3. Et enfin, on tire simultanément 3 boules de U_3. Quelle est la probabilité d'avoir 3 boules rouges ?

Exercice 14 (Monty-Hall)**.** Lors d'un jeu télévisé, une personne doit choisir une porte parmi 3. Derrière une des portes, il y a un lot à gagner, et rien derrière les deux autres. Une fois la porte choisie, la présentatrice ouvre une des deux portes qui n'ont pas été choisies en s'assurant de ne pas ouvrir la porte avec le lot (la présentatrice connaît la porte derrière laquelle est cachée le lot). On propose alors à la personne de changer d'avis sur la porte à ouvrir parmi les deux restantes. Que pensez vous qu'elle doit faire ?