TD 16 : Comparaisons de fonctions, développements limités

1 Dérivées successives

Exercice 1. Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{1-x}$
2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$
3. $f_3 : x \mapsto e^{2x+1}$
4. $f_4 : x \mapsto (x^2+1)e^{\frac{x}{2}}$

Indication : pour f_2, on pourra remarquer que $f_2(x) = \frac{1}{2}f_1(x) + \frac{1}{2}f_1(-x)$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Rappeler la dérivée k-ième de $f : x \mapsto x^n$ pour $k \leqslant n$.
2. Calculer de deux manières différentes la dérivée n-ième de $g : x \mapsto x^{2n}$ et en déduire ainsi la valeur de
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Indication. On pourra remarquer que $g = f \times f$ et appliquer la formule de Leibniz pour dériver.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction
$$f_n : x \mapsto x^n \ln(x).$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que la fonctions f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis, à l'aide de la formule de Leibniz, que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n^{(n)}(x) = x f_{n-1}^{(n)}(x) + n f_{n-1}^{(n-1)}(x).$$
2. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n^{(n)}(x) = n!\left(\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$
3. Rappeler une expression de $\ln^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2 Développements de Taylor

Exercice 4. Utilisation de l'inégalité de Taylor-Lagrange pour calculer des valeurs approchées.

1. On note $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$
   a. Calculer les dérivées successives (jusqu'à la 3ième) de f et véfier que
   $$f'(0) = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4} \quad \text{et}$$
   $$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8(1+x)^{\frac{5}{2}}} \text{ pour tout } x > -1.$$
   Indication : utiliser l'écriture sous forme de puissance de la racine carrée et la formule $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$.
   b. Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée à f, calculer une valeur approchée de $\sqrt{1,01}$.
   c. Quelle précision a t-on obtenue à la question précédente ?
2. En s'inspirant de la question précédente, calculer $\ln(1,1)$ à 10^{-4} près et $\cos(0,2)$ à 10^{-4} près.

Exercice 5. Inégalités à partir de la formule de Taylor reste intégral.

1. a. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 pour la fonction exponentielle.
   b. Étudier le signe du reste intégral.
   c. En déduire que $\forall x \geqslant 0,\ e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$
2. Montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}$

Exercice 6. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1-x)$.

1. Calculer une expression de $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et vérifier que $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = -\frac{1}{n}$
2. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que pour $x \in [-1, 0]$,
$$\left| f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$
3. En déduire la convergence et la limite de la suite $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

3 Développements limités

Exercice 7. Calculer les développements limités des expressions suivantes à l'ordre indiqué pour x au voisinage de 0.

1. À l'ordre 2 :
$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x},$$
2. À l'ordre 4 :
$$\big(\cos(x) - 1\big)e^x,$$
3. À l'ordre 3 :
$$\ln(1+x) - \ln(1-x),$$
4. À l'ordre 4 :
$$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2.$$

Exercice 8. Donner un équivalent simple au voisinage de 0 pour les fonctions f, g et h définies ci-dessous :

1. $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$,
2. $g(x) = x(2+\cos(x)) - 3\sin(x)$,
3. $h(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Exercice 9. Études de séries à l'aide des développements limités.

1. a. À l'aide d'un développement limité, déterminer un équivalent de $n\sin(\frac{1}{n}) - 1$ quand $n \to +\infty$.
   b. En déduire si la suite (u_k) suivante est convergente :
$$u_k = \sum_{n=1}^{k}\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right).$$
2. a. Montrer que, quand $n \to \infty$,
$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \mathrm{e}^{-n-\frac{1}{2}+o(1)}$$
   puis que
$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\mathrm{e}^{-n}.$$
   b. En déduire si la suite suivante est convergente :
$$u_k = \sum_{n=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Exercice 10. On note
$$f : x \mapsto \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ainsi que sa classe de régularité de f sur $\mathcal{D}_f$.
2. Montrer à l'aide d'un développement limité que f se prolonge par continuité et en 0, et que ce prolongement, encore noté f, est dérivable en 0.
3. Donner l'équation de la tangente à f en 0.
4. Peut-on prolonger f par continuité en -1 ? Que peut-on dire de la tangente en -1 ?
5. Représenter l'allure du graphe de f.

Exercice 11. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$
$$f : t \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} \text{ si t >0} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

1. Justifier que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.
3. Calculer $f'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ et en déduire que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(n)}(t) = P_n(t)t^{-2n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}$.
   Indication : lors de l'hérédité, le polynôme P_{n+1} est défini en fonction de P_n par $P_{n+1} = X^2P_n' - 2nXP_n + P_n$.
5. En déduire que pour tout $\in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$.

Exercice 12. Développement limité de la fonction tangente.

1. Exprimer la fonction $\tan'$ à l'aide de tan.
2. En déduire successivement l'expression de $\tan^{(2)}$, $\tan^{(3)}$, $\tan^{(4)}$ et $\tan^{(5)}$ comme polynôme de la fonction tangente.
3. À l'aide de la formule de Taylor-Young, donner le développement limité en 0 à l'ordre 5 de tangente.

Exercice 13. Calculer $f^{(6)}(0)$ où f est la fonction $f : x \mapsto x\sin(x)\mathrm{e}^x$.