Définition 1 (*Proposition logique*)

Une *proposition* (ou *assertion*) est un énoncé mathématique qui est vrai (V) ou faux (F).
Elle ne peut pas être vraie et fausse, c'est le principe du *tiers exclu.*

Définition 2 (*Connecteurs logiques*)

Pour P et Q deux propositions, on peut construire les assertions suivantes :

- La *négation* non(P) (notée parfois $\neg P$), qui est vraie si P est fausse.
- La *conjonction* P et Q (notée parfois $P \wedge Q$), vraie si P et Q le sont.
- La *disjonction* P ou Q (notée parfois $P \vee Q$), qui est vraie si P est vraie ou que Q l'est. Cela inclut le cas où P et Q sont toutes les deux vraies.
- L'*implication* $P \implies Q$, qui est vraie si P est fausse ou si Q est vraie.
- L'*équivalence* $P \iff Q$, qui est vraie si $P \implies Q$ et $Q \implies P$.

On résume souvent ces définitions par les *tables de vérité* suivantes.

P	Q	non(P)	P et Q	P ou Q	$P \implies Q$	$P \iff Q$	non(non(P))
F	F	V	F				
F	V	V	F				
V	F	F	F				
V	V	F	V				

EXO 1 : écrire la table de vérité du connecteur logique « ou exclusif », aussi appelé *xor*, et le décrire à l'aide des trois connecteurs « ou », « et » et « non ».

Vocabulaire. ▶ Si P et Q sont deux propositions, l'implication $Q \implies P$ est appelée *implication réciproque* de $P \implies Q$.

- Pour traduire que l'**implication** $P \implies Q$ est vraie, on peut dire :
  - P implique Q.
  - Si P est vraie, alors Q est vraie. *Alternative : si P, alors Q.*
  - P est une *condition suffisante* pour que Q soit vraie.
  - Q est une *condition nécessaire* pour que P soit vraie.
  - Il suffit que P soit vraie pour que Q soit vraie.
  - Il faut que Q soit vraie pour que P soit vraie.
- Pour traduire que l'**équivalence** $P \iff Q$ est vraie, on peut dire :
  - P et Q sont *équivalentes.*
  - P est vraie si et seulement si (ssi) Q est vraie.
  - P est une *condition nécessaire et suffisante* pour que Q soit vraie.

EXO 2 : *Distributivité de « et » et « ou ».* Pour P, Q et R des propositions logiques, montrer les équivalences suivantes en utilisant des tables de vérité :

- (P et Q) ou R $\iff$ (P ou R) et (Q ou R),
- (P ou Q) et R $\iff$ (P et R) ou (Q et R).

Définition 3 (*Quantificateurs*)

Pour X un ensemble et $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable $x \in X$, on définit les propositions suivantes :

- « $\forall x \in X, P(x)$ » qui signifie « tous les éléments de X vérifient P ».
- « $\exists x \in X : P(x)$ » qui signifie « au moins un élément de X vérifie P ».
- « $\exists! x \in X : P(x)$ » qui signifie « un unique élément de X vérifie P ».

On appelle $\forall$ le *quantificateur universel* et $\exists$ le *quantificateur existentiel.*

EXO 3 : *Attention à l'ordre !* Si f est une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, comparer les assertions « $\exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq A$ » et « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R} : f(x) \leq A$ ».

Propriété 4 (*Négation de propositions*)

Pour P et Q deux propositions, on a les lois de De Morgan :

- non(P et Q) $\iff$ non(P) ou non(Q).
- non(P ou Q) $\iff$ non(P) et non(Q).

Pour $P(x)$ une proposition définie pour $x \in X$, on a

- non$(\forall x \in X, P(x))$ $\iff$ $\exists x \in X :$ non$(P(x))$,
- non$(\exists x \in X : P(x))$ $\iff$ $\forall x \in X,$ non$(P(x))$.

EXO 4 : montrer que « non$(P \implies Q)$ » est équivalente à « P et non(Q) »

EXO 5 : traduire avec des quantificateurs l'assertion « la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante ».

Propriété 5 (*Raisonnement par l'absurde*)

Si non$(P) \implies$ Faux, alors P est vraie.

Propriété 6 (*Contraposition*)

Pour P et Q deux propositions,

$$P \implies Q \iff \text{non}(Q) \implies \text{non}(P).$$

On appelle non$(Q) \implies$ non(P) implication *contraposée* de $P \implies Q$.

EXO 5 : démontrer que si un entier a un carré pair, alors il est pair.