I Combinatoire

Définition 1 (*Parties d'un ensemble*)

On dit qu'un ensemble A est une partie d'un ensemble E lorsque $A \subset E$.
On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Définition 2 (*Intersection et réunion d'une famille de parties*)

Pour A_1, …, A_n des parties d'un ensemble E, on note

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup \cdots \cup A_n = \big\{x \in E \,|\, \exists i \in [\![1,n]\!], x \in A_i\big\},$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap \cdots \cap A_n = \big\{x \in E \,|\, \forall i \in [\![1,n]\!], x \in A_i\big\}.$$

Définition 3 (*Partition d'un ensemble*)

Pour A_1, …, A_n des parties d'un ensemble E, on dit que la famille de parties $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une partition de E lorsque

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Définition 4 (*Listes, arrangements et combinaisons*)

Pour E un ensemble et k un entier non nul, on définit

- l'ensemble des k-listes (ou k-uplets) d'éléments de E :

$$E^k = \big\{(x_1, \dots, x_k)\ ;\ x_1 \in E,\, x_2 \in E, \dots \text{ et } x_k \in E\big\},$$

- l'ensemble des arrangements à k éléments de E :

$$\mathcal{A}_k(E) = \big\{(x_1, \dots, x_k) \in E^k \,|\, \forall (i,j) \in [\![1,k]\!]^2, i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\big\},$$

- l'ensemble des parties à k éléments (ou combinaisons de k éléments) de E :

$$\mathcal{P}_k(E) = \big\{A \in \mathcal{P}(E) \,|\, \mathrm{Card}(A) = k\big\}.$$

I.1 Ensembles finis

Définition 5 (*Cardinal*)

Pour E un ensemble avec un nombre fini d'éléments, on note $\mathrm{Card}(E)$, ou $|E|$, le nombre (entier) de ses éléments.

Remarques.

- Un ensemble E est de cardinal n si et seulement il existe une bijection de E dans $[\![1,n]\!]$.
- Si $\mathrm{Card}\, E = n$, on peut numéroter ses éléments et écrire $E = \{x_1, \cdots, x_n\}$.

Propriété 6

Soit F un ensemble fini et $E \subset F$. Alors E est fini et

- $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F)$,
- si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, alors $E = F$.

Propriété 7 (*Cardinal du complémentaire, de l'union*)

Pour A et B deux parties d'un ensemble fini E, on a

- $\mathrm{Card}\, \overline{A} = \mathrm{Card}\, E - \mathrm{Card}\, A$,
- $\mathrm{Card}\, A \cup B = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B - \mathrm{Card}\, A \cap B$ (*formule du crible* $n = 2$).

Et si $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une partition de E, on a $\mathrm{Card}\, E = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\, A_i$.

Propriété 8 (*Cardinal du produit cartésien*)

Pour E et F deux ensembles finis, $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E)\,\mathrm{Card}(F)$.

Remarque : avoir en tête la généralisation à n ensembles finis E_1, $\cdots$, E_n :

- si les ensembles sont deux à deux disjoints, $\mathrm{Card}\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\, E_i$,
- sinon $\mathrm{Card}\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) < \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\, E_i$,
- et $\mathrm{Card}\,(E_1 \times \cdots \times E_n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\, E_i$.

Exo 1 : pour $n \leq m$ des entiers, rappeler le cardinal de $[\![n,m]\!]$ et calculer le cardinal des ensembles $\{(i,j) \in [\![1,n]\!] \mid i < j\}$ et $\{(i,j) \in [\![1,n]\!] \mid i \leq j\}$.

I.2 Applications entre ensembles finis et dénombrement

Dans cette section, E et F sont des ensembles finis et $f : E \to F$ une application.

Propriété 9

- $|f(E)| \leq |E|$ avec égalité si et seulement si f est injective.
- Si f est injective, alors $|E| \leq |F|$.
- Si f est surjective, alors $|F| \leq |E|$.
- Si f est bijective, alors $|E| = |F|$.

Remarque. On appelle *principe des tiroirs* la contraposée du deuxième point.

EXO 2 : pour $n \in \mathbb{N}^\star$, combien y a-t-il de matrices à 4 lignes et 3 colonnes, à coefficients dans $[\![1, n]\!]$?

Propriété 10

Si E et F ont même cardinal, alors

$$f \text{ est surjective } \iff f \text{ est injective } \iff f \text{ est bijective.}$$

Culturel :

Propriété 11 (*Lemme des bergers*)

S'il existe un entier k tel que tout élément de F admet exactement k antécédents par f, alors $|E| = k|F|$.

Définition 12

Une application bijective de E dans lui-même est appelé une *permutation* de E. L'ensemble des permutations de E $[\![1, n]\!]$ est noté $\mathfrak{S}(E)$. Si $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}([\![1, n]\!])$ l'ensemble des permutations des n premiers nombres entiers.

Remarques.

- Si $|E| = n$, l'étude de $\mathfrak{S}(E)$ se ramène à celle de $\mathfrak{S}_n$.
- *"À permutation près" :* la notion de permutation est utile pour décrire et dénombrer les situations où l'ordre n'a pas d'importance.

I.3 Dénombrements usuels

Propriété 13

Si E est un ensemble fini, alors $\mathcal{P}(E)$ et $\mathfrak{S}(E)$ sont des ensembles finis, avec

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card } E} \quad \text{et} \quad \text{Card}(\mathfrak{S}(E)) = (\text{Card}(E))!.$$

EXO 3 : pour $(p, n) \in (\mathbb{N}^\star)^2$, combien y a-t-il d'injections et de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$?

Propriété 14 (*Dénombrements usuels*)

Si $\text{Card}(E) = n$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\text{Card}(E^k) = n^k$ et pour $k \leqslant n$

$$\text{Card}\big(\mathcal{A}_k(E)\big) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{et} \quad \text{Card}\big(\mathcal{P}_k(E)\big) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Propriété 15 (*Lien avec les situations de tirages « aléatoires »*)

Nombre d'issues possibles lors d'un tirage de k éléments dans un ensemble à n éléments :

	avec remise	sans remise
avec ordre	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$ si $k \leqslant n$, et 0 sinon
sans ordre	?	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$ si $k \leqslant n$, et 0 sinon

EXO 4 : une urne contient 3 boules : une verte, une rouge, une bleue. On en tire deux boules. Lister les issues possibles avec/sans remise, avec/sans ordre.

Propriété 16 (*Lien entre coefficient binomial et dénombrement*)

Pour k et $n \in \mathbb{N}$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de :

- combinaisons (ou parties) à k éléments d'un ensemble à n éléments,
- tirages possibles lors d'un tirage simultané de k éléments parmi n.
- chemins à k « succès » dans un arbre binaire de longueur n.

II Univers et évènements d'une expérience aléatoire

Définition 17

- On appelle *expérience aléatoire* toute expérience dont le résultat est a priori incertain, c'est-à-dire qui répétée dans des conditions « identiques », ne donne pas forcément le même résultat.
- Une *éventualité* (ou *issue*) est une modélisation d'un résultat possible.
- L'*univers* est l'ensemble de toutes les éventualités, noté en général Ω.
- Un *évènement aléatoire* est un évènement qui peut se produire ou non en fonction du résultat de l'expérience aléatoire. On le représente par l'ensemble des éventualités qui le réalisent. On l'identifie à une partie de Ω.

Définition 18 (*Rappels et vocabulaire*)

Soient $\omega \in \Omega$ une éventualité et A et B des évènements.

- On dit que « A est réalisé » lorsque $\omega \in A$.
- L'évènement *contraire* $\overline{A}$ est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.
- L'évènement $A \cup B$ est réalisé si et seulement si A ou B est réalisé.
- L'évènement $A \cap B$ est réalisé si et seulement si A et B sont réalisés.
- On dit que deux évènements A et B sont *incompatibles* si $A \cap B = \emptyset$.
- Un évènement réalisé par une unique éventualité est appelé *évènement élémentaire* (ou *singleton*).

EXO 5 : On lance deux dés à 6 faces. Lister les issues des événements suivants :

(a) Les deux dés ont la même valeur.

(b) On obtient un double 6.

(c) Au moins l'un des dés donne 6.

(d) La somme des résultats vaut 4.

Définition 19 (*Système complet d'évènements*)

Pour une expérience aléatoire d'univers Ω, et A_1, ..., A_n des évènements, on dit que A_1, ..., A_n forment un système complet d'évènements lorsque

$$\text{pour } i \neq j \text{ on a } A_i \cap A_j = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega.$$

Remarque. Pour tout évènement A, A et $\overline{A}$ forment un système complet d'évènements.

III Calculs de probabilité

Définition 20

On appelle *probabilité* sur Ω toute application $\mathbb{P}$ définie sur l'ensemble des évènements $\mathcal{P}(\Omega)$ et à valeur dans $[0,1]$ telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et

$$\text{pour tout } A \text{ et } B \in \mathcal{P}(\Omega) \textbf{ incompatibles}, \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Remarque. La notion de probabilité sert à représenter la fréquence de réalisation d'un évènement si l'on répète l'expérience un très grand nombre de fois.

Propriété 21 (*Famille d'évènements incompatibles*)

Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des évènements deux à deux incompatibles, alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\ .$$

Propriété 22 (*Calculs de probabilités*)

Pour $\mathbb{P}$ une probabilité définie sur Ω et A et B deux évènements, on a

- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

Propriété 23 (*Équiprobabilité*)

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire (avec Ω fini). L'application

$$\mathbb{P} : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1] \\ A \mapsto \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} \end{cases}$$

est une probabilité appelée *probabilité uniforme* sur l'univers Ω.

Remarque. Une expérience de tirage « au hasard », en l'absence d'information supplémentaire, est modélisée avec une probabilité uniforme.

EXO 6 : Quelle est la probabilité qu'au moins 2 élèves d'une classe de 44 aient la même date d'anniversaire ?

IV Conditionnement et indépendance

Définition 24

Pour A et B deux évènements avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on définit la probabilité de A *sachant* B (ou *conditionnée* par B) par

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarque. Dans un exercice « concret », on déterminera généralement la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B(A)$ en étudiant, dans l'expérience considérée, la probabilité que A se réalise en **supposant** que B est réalisé. La formule ne sert pas toujours !

Propriété 25

Pour B un évènement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, l'application $\mathbb{P}_B$, qui à tout évènement A associe $\mathbb{P}_B(A)$, est une probabilité sur Ω, appelée *probabilité conditionnelle.*

Remarque : les formules de la prop. 22 s'appliquent donc aussi avec des probabilités conditionnelles.

Théorème 26 (*Formule des probabilités composées*)

Pour $A_1, \ldots, A_n$ des évènements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Théorème 27 (*Formule des probabilités totales*)

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des évènements formant un système complet. Alors, pour tout évènement B,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B).$$

EXO 7 : On dispose de 10 pièces de monnaie d'apparence identique dont une est truquée et donne pile avec probabilité $\frac{3}{4}$ lorsqu'on la lance, et les autres pièces sont biens équilibrées.

1. On choisit une pièce au hasard parmi les 10, puis on la lance. Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?
2. On choisit une pièce de monnaie au hasard et on la lance deux fois. Sachant qu'on a obtenu deux piles, quelle est la probabilité que ce soit la pièce truquée qui ait été choisie ?

Propriété 28 (*Formule de Bayes*)

Pour A et B des évènements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)} .$$

Pour $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'évènements de probabilités non nulles et B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, on a, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$;

$$\mathbb{P}_B(A_k) = \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}.$$

Définition 29 (*Indépendance de deux évènements*)

Deux évènements A et B sont dits *indépendants* lorsque la réalisation de l'un n'a pas d'influence sur la réalisation éventuelle de l'autre. C'est équivalent à

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Définition 30 (*Indépendance mutuelle de n évènements*)

Des évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont dit *mutuellement indépendants* si la réalisation de n'importe lesquels d'entre eux n'a pas d'influence sur la réalisation éventuelle des autres. C'est équivalent à

$$\forall J \subset [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j \in J} A_j\Big) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

En particulier, si $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n).$$

Propriété 31

Si les évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors il en est de même pour $B_1, \ldots, B_n$ avec $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.