Dans tout le chapitre, on note I un intervalle de $\mathbb{R}$.

I Formules de Taylor

Propriété 1 (*Formule de Taylor avec reste intégral*)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ avec $0 \in I$. On a pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt.$$

EXO 1 :

- Écrire la formule de Taylor à l'ordre 3 pour la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.
- Écrire la formule de Taylor à l'ordre 5 pour le sinus.
- Écrire la formule de Taylor à l'ordre n pour l'exponentielle.
- Que se passe-t-il si la fonction f est polynomiale de degré n ?

Remarque. Pour obtenir une formule de Taylor en un point $a \neq 0$, il suffit de considérer $h \mapsto f(a+h)$.

Théorème 2 (*Inégalité de Taylor-Lagrange*)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$.
Si il existe $M_n \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in I$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M_n$, alors

$$\forall x \in I, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \right| \leqslant \frac{M_n \, |x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

II Développements limités

II.1 Définition et premières propriétés

Rappel : négligeabilité et notation $o(...)$, pour $x \to 0$.

Définition 3 (*Développement limité*)

Pour $f : I \to \mathbb{R}$, avec x_0 dans ou au bord de I, et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un *développement limité* à l'ordre n en x_0 s'il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in I, \; f(x) \underset{x \to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

Propriété 4

Les coefficients du développement limité de f en x_0, si ils existent, sont uniques.

Conséquence : le DL en 0 d'une fonction paire n'a que des termes de degré pair ; celui d'une fonction impaire n'a que des termes de degré impair.

Propriété 5 (*Formule de Taylor-Young*)

Si $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$, alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 donné par

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right).$$

EXO 2 : Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ une fonction polynomiale. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P^{(k)}(0) = k! a_k$.

Propriété 6 (*Lien entre DL et dérivabilité*)

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $0 \in I$ si et seulement si elle admet un DL à l'ordre 1 en 0. Dans ce cas, et le DL à l'ordre 1 de f est

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x)$$

Remarque. L'équivalence imaginée n'est pas vraie à l'ordre 2 : le prolongement continu de la fonction $f : x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ admet un DL à l'ordre 2 en 0, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

II.2 Opérations sur les développements limités

Propriété 7 (*Combinaisons linéaires et produits de DL*)

Si f et g admettent un DL d'ordre n en x_0, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

- $f + g$ admet un DL d'ordre n en x_0 qui est la somme des DLs de f et g,
- λf admet un DL d'ordre n en x_0 qui est le multiple de λ et du DL de f,
- fg admet un DL d'ordre n qui est égal au produit des DLs de f et g (en tronquant à l'ordre n).

EXO 3 : écrire un DL_3 de la fonction $e^x + \frac{2}{1-x}$ en 0, un DL_2 de $\cos(x)\sqrt{1+x}$ en 0, et un DL_3 de $\tan(x)$ en 0.

Propriété 8 (*Composition de DL*)

Si f et g admettent des DL à l'ordre n en x_0 et y_0, avec $f(x_0) = y_0$, alors $g \circ f$ admet un DL_n en x_0 qui est égal à la composition des DLs de g et f (en tronquant à l'ordre n).

EXO 4 : écrire un DL_3 de $e^{\sin x}$ en 0 et un DL_2 de $\sqrt{1+\cos x}$ en 0..

Propriété 9 (*Primitivation de DL*)

Si f admet comme DL_n en x_0 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-x_0)^i + o\left((x-x_0)^n\right)$, alors toute primitive F de f admet un DL d'ordre $n+1$ en x_0 tel que :

$$F(x) \underset{x \to x_0}{=} F(x_0) + \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i(x-x_0)^{i+1}}{i+1} + o\left((x-x_0)^{n+1}\right).$$

Par conséquent, si f' admet un DL, ce dernier est la dérivée du DL de f.

Attention, cette proposition assure que les DL peuvent s'intégrer (se primitiver), mais dériver des DL n'apportent a priori pas d'information sur l'éventuelle dérivée de la fonction de départ (considérer $f(x) = x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et son DL_2 en 0).

EXO 5 : retrouver le DL à l'ordre n de $\ln(1+x)$ en 0 à partir de celui de $\frac{1}{1+x}$.

EXO 6 : déterminer le DL de arctan à tout ordre en 0.

III Utilisations des développements limités

III.1 Calcul de limites et d'équivalents

Propriété 10

Si une fonction f admet un DL non nul en un point a, f est équivalente en a au premier terme non nul de ce DL.

EXO 7 : Montrer que $\dfrac{1}{(\sin x)^2} - \dfrac{1}{x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}$.

EXO 8 : Déterminer un équivalent en 0 de $\sin \circ \mathrm{sh} - \mathrm{sh} \circ \sin$.

III.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Le DL_1 d'une fonction en x_0 donne l'équation de la tangente à sa courbe en x_0. Pour déterminer la position de la courbe par rapport à cette tangente, il faut regarder le premier terme de degré ≥ 2 non nul dans le DL de la fonction en x_0.

EXO 9 : donner la tangente en 0 et localement la position de la courbe par rapport à cette tangente pour la fonction $f(x) = \frac{5x - x^3}{3+x^2}$.

III.3 Approximation de la bijection réciproque

Exemple : soit $f : x \mapsto xe^{x^2}$, strictement monotone, bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de classe C^∞. Sa réciproque f^{-1} est dérivable, de dérivée :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

On en déduit que f^{-1} est de classe C^∞, et donc admet un DL à tout ordre en 0.

EXO 10 : écrire le DL à l'ordre 3 de f^{-1} en 0.

IV Développements asymptotiques

Définition 11

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On appelle **développement asymptotique** à n termes de $f(x)$ une expression de la forme

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + o(u_n(x)),$$

avec $\forall 1 \leq i \leq n-1,\ u_{i+1}(x) = \underset{x \to x_0}{o}(u_i(x))$.

Exemple : La fonction $x \mapsto \sin\sqrt{x}$ n'admet pas de DL_1 en 0 (pas dérivable), mais :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sin\sqrt{x} \underset{x \to x_0}{=} x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3!} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5!} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{\frac{2n+1}{2}}}{(2n+1)!} + o\left(x^{\frac{2n+1}{2}}\right).$$

EXO 11 : écrire un développement asymptotique à deux termes de la fonction réciproque de $x \mapsto xe^{x^2}$ en $+\infty$.

Définition 12

S'il existe a, b deux réels tels que $f(x) - (ax+b) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, alors on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote** au graphe de f en $+\infty$.

EXO 12 : montrer que la fonction $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ admet une droite asymptote en $+\infty$ et de déterminer la position relative de la courbe et cette asymptote.

V Mémo / méthodo

Développements limités usuels

À connaître impérativement : $\forall k, n \in \mathbb{N}$,

$$\heartsuit \quad \boxed{e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).} \quad \heartsuit$$

EXO 13 : en considérant $\exp(ix)$, retrouver les DL de cos et sin en 0 :

$$\heartsuit \quad \boxed{\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1}).} \quad \heartsuit$$

$$\heartsuit \quad \boxed{\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2k+2}).} \quad \heartsuit$$

EXO 14 : écrire les DL à tout ordre de ch et sh, comme parties paires et impaires de l'exponentielle.

$$\heartsuit \quad \boxed{(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha - i)}{n!}x^n + o(x^n).} \quad \heartsuit$$

$$\heartsuit \quad \boxed{\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n).} \quad \heartsuit$$

Remarque. Contrairement aux autres, on obtient ce dernier directement à l'aide de l'identité de la somme géométrique : si $x \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

$$\heartsuit \quad \boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).} \quad \heartsuit$$

Comment s'y prendre pour ... ?

- ... déterminer un développement limité ?
  - ◇ utiliser les développements limités usuels,
  - ◇ intégrer un développement limité en n'oubliant pas de déterminer la constante d'intégration (souvent nulle).
- ... déterminer le développement limité d'un quotient ?
  - ◇ se ramener à un produit en faisant apparaître un quotient de la forme $\dfrac{1}{1+X}$ avec $X \to 0$.
- ... déterminer une limite ?
  - ◇ déterminer un équivalent.
- ... déterminer la position relative du graphe par rapport à la tangente/asymptote ?
  - ◇ étudier le signe du premier coefficient non nul d'ordre $k \geq 2$ du développement limité (ou du développement asymptotique dans le cas d'une asymptote).
- ... déterminer un DL de f^{-1} quand on ne peut pas l'exprimer explicitement ? Au choix :
  - ◇ intégrer un DL de la dérivée,
  - ◇ identifier les coefficients du DL de $f \circ f^{-1}$,
  - ◇ utiliser un DL de f puis un changement de variable.