Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Polynômes, degré et opérations

I.1 Définitions

Définition 1

Un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de coefficients, qui est nulle à partir d'un certain rang. On la note plutôt à l'aide de l'*indéterminé* X sous la forme :

$$P(X) = \sum_{k\geq 0} a_k X^k = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \cdots$$

(cette somme est nécessairement finie.)
Les nombres $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sont appelés les coefficients du polynôme.

Vocabulaire. L'*indéterminé* X correspond à la suite $(0, 1, 0, 0, ...)$. Ce nom vient du fait qu'on pourra remplacer X par des réels, des complexes, ou encore des matrices ou des fonctions... c'est-à-dire *évaluer* le polynôme en n'importe quel objet mathématique qu'on peut élever à une puissance, multiplier par un scalaire et sommer. On ne cherche donc pas à restreindre la *nature* de X.
Notation. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on a l'inclusion $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

Définition 2 (*Degré d'un polynôme*)

Pour P un polynôme, et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de coefficients associée :

- si P n'est pas nul, on note $\deg(P)$ le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$,
- si P est nul, c'est à dire $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = 0$, alors $\deg(P) = -\infty$.

Vocabulaire. Pour P un polynôme non nul, de coefficients $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et de degré $d \in \mathbb{N}$,

- a_d est appelé le *coefficient dominant* de P et $a_d X^d$ le *terme dominant* de P,
- si $a_d = 1$, le polynôme P est dit *unitaire*,
- si $k \in \mathbb{N}$, a_k est appelé *coefficient d'indice* k de P et $a_k X^k$ son *terme de degré* k,
- a_0 est appelé le *coefficient constant* ou *terme constant* de P.

EXO 1 : Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant des polynômes $(X+2)^3 - (X-1)^3$ et $X^{2n} - (X-1)^n(X+1)^n$, pour $n \in \mathbb{N}^\star$

Notation. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ les polynômes de degré **au plus** n.
Remarque. $\mathbb{K}_0[X] \subset \mathbb{K}_1[X] \subset \mathbb{K}_2[X] \subset \cdots \subset \mathbb{K}[X]$.

Définition 3

Soient $P(X) = \sum_{k\geq 0} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle fonction polynomiale associée au polynôme P la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} \tilde{P} : & \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k\geq 0} a_k x^k \quad \textit{(cette somme est finie.)} \end{array}$$

Selon $\mathbb{K}$, c'est une fonction de la variable réelle à valeurs réelles ou une fonction de la variable complexe à valeurs complexes.

Remarque. À une fonction polynomiale correspond un unique polynôme (démo à venir). Le montrer à la main pour des fonctions polynomiales de degré ≤ 3.

I.2 Opérations sur les polynômes et structure de $\mathbb{K}[X]$

Propriété 4 (*Opérations sur les polynômes*)

Pour P et $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit par analogie avec les fonctions polynomiales λP, $P+Q$, $P \times Q$ et $P \circ Q$, qui sont encore des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Les lois $+$ et $\times$ sont commutatives, et $\times$ est distributive sur $+$.

Propriété 5 (*Coefficients d'un produit de polynômes*)

Si P a pour coefficients $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et Q a pour coefficients $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, alors si $k \in \mathbb{N}$, le coefficient d'indice k du produit PQ est égal à $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

Propriété 6 (*Opérations et degré*)

Pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ non nuls et $\lambda \in \mathbb{K}^\star$, on a

- $\deg(\lambda P) = \deg(P)$,
- $\deg(P+Q) \leqslant \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$,
- si $\deg(P) > \deg(Q)$, alors $\deg(P+Q) = \deg(P)$,
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$,
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$ (ex : $\deg\big(P(X^k)\big) = k\deg(P)$ pour $k \geqslant 1$).

Remarque : Pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a : $\quad PQ = 0 \implies P = 0$ ou $Q = 0$.
On dit que $\mathbb{K}[X]$ est *intègre*, contrairement à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

EXO 2 : Soit $b \in \mathbb{K}$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X-b)^k$. Montrer que si $P = 0$, alors $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

I.3 Dérivation

Définition 7 (*Dérivée(s) d'un polynôme*)

Par analogie avec les fonctions polynomiales, si $P = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$ dans $\mathbb{K}[X]$, on définit le polynôme dérivé de P par $P' = \sum_{k\geq 1} k a_k X^{k-1} \in \mathbb{K}[X]$.
On note $P^{(0)} = P$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'$.

Remarque. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la fonction polynomiale associée au polynôme dérivé coïncide avec la dérivée de la fonction polynomiale du polynôme de départ - ouf !

Rappel. Si $n \in \mathbb{N}^\star$ et $P = X^n$, alors $P^{(k)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} \text{ si } k \leq n, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Propriété 8

Pour tout $P(X), Q(X) \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
- $(P+Q)' = P' + Q'$,
- $(\lambda P)' = \lambda P'$,
- $(PQ)' = P'Q + PQ'$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$.

Propriété 9 (*Degré et dérivation*)

Pour tout $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, si

$$\deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si} \quad \deg(P) \geq 1 \\ -\infty & \text{si} \quad \deg(P) \leq 0 \end{cases}$$

Exo 3 : Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par récurrence par $P_0 = X$, et $P_{n+1} = X^2 P_n' + P_n(X+1)$ si $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré de P_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 10 (*Formule de Taylor pour les polynômes*)

Soit $P(X) \in \mathbb{K}_n[X]$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k.$$

En particulier les coefficients de P vérifient : $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(0)$.

II Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 11

Pour $(A, B) \in (\mathbb{K}[X])^2$, on dit que A est un *multiple* de B dans $\mathbb{K}[X]$, ou que B *divise* A dans $\mathbb{K}[X]$, s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.
On dit également que B est un *facteur* de A dans $\mathbb{K}[X]$.

Remarques.
- Tout polynôme divise le polynôme nul.
- La divisibilité est une relation *transitive* : si A, B et C sont trois polynômes tels que A divise B et B divise C, alors A divise C.
- Si A et B sont des polynômes à coefficients réels et que A divise B dans $\mathbb{C}[X]$, alors A divise aussi B dans $\mathbb{R}[X]$ - c'est pourquoi on omet souvent à notre niveau la précision.

Propriété 12

Soit A et B des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non nuls. Si B divise A et $\deg(A) = \deg(B)$ alors il existe $k \in \mathbb{K}^\star$ tel que $A = kB$.

Définition 13 (*Polynômes irréductibles*)

Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit *irréductible dans* $\mathbb{K}[X]$ s'il ne peut pas s'écrire comme produit de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degrés tous strictement plus petits que celui de P.

Remarques.
- On peut toujours écrire un polynôme comme le produit d'un scalaire avec un polynôme du même degré...
- De manière équivalente, un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible si et seulement ses seuls diviseurs sont les polynômes constants non nuls, et les λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^\star$.
- L'irréductibilité dépend du corps considéré : X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$.

Théorème 14 (*Division euclidienne des polynômes*)

Soit B un polynôme non nul. Pour tout polynôme A, il **existe** un **unique** couple de polynômes (Q, R) vérifiant les deux conditions suivantes :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Les polynômes Q et R sont appelés respectivement *quotient* et *reste* dans la division euclidienne de A par B.

Exo 4 : écrire la division euclidienne de $X^5 - 5X + 1$ par $X^2 + 1$.

III Racines

Définition 15 (*Racine d'un polynôme*)

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on dit que α est une *racine* de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Propriété 16 (*Racines complexes conjuguées*)

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ admet une racine complexe α, alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P.

EXO 5 : factoriser $P = 2X^3 - (2+6i)X^2 + 9iX - 3i$ dans $\mathbb{C}[X]$ sachant qu'il possède une racine réelle.

Propriété 17 (*Racines et arithmétique*)

Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, α est une racine de $P \iff X - \alpha$ divise P.
Pour $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ **distincts**,

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ sont des racines de } P \iff \prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k) \text{ divise } P.$$

Propriété 18 (*Degré et nombre de racines*)

Soit P un polynôme.

- Si P est non nul, son nombre de racines est au plus $\deg(P)$.
- Si P admet strictement plus de racines que son degré, alors P est nul.

Conséquence : un polynôme est déterminé par sa fonction polynomiale associée.

Propriété 19 (*Multiplicité d'une racine*)

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$, il y a équivalence entre les 3 propositions :

i) m est le plus grand entier tel que $(X - \alpha)^m$ divise P dans $\mathbb{K}[X]$,

ii) il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$,

iii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

On dit alors que α est une racine de multiplicité m de P.

Vocabulaire. Une racine de multiplicité 2 est appelée *racine double.*

Remarque. Si α est la racine complexe d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\overline{\alpha}$ est racine avec la même multiplicité.

EXO 6 : factoriser $P = X^5 - 6X^4 + 10X^3 + 4X^2 - 24X + 16$ dans $\mathbb{R}[X]$ sachant qu'il possède une racine réelle de multiplicité 3.

Conséquence utile : Si P_1 et P_2 sont des polynômes tels que P_1 divise P_2, alors les racines de P_1 sont des racines de P_2, au moins avec la même multiplicité.

EXO 7 : soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \neq b$ deux éléments de $\mathbb{K}$. Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ et par $(X - a)^2$.

Propriété 20 (*Degré et nombre de racines comptées avec multiplicité*)

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ admet k racines distinctes, de multiplicité $m_1, \cdots, m_k$, alors $m_1 + \cdots + m_k \leq \deg(P)$.

Conséquence. Si P admet autant de racines que son degré, elles sont toutes simples.

IV Irréductibles & factorisation

IV.1 Dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème 21 (*Théorème de d'Alembert Gauss (admis)*)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine complexe.

Propriété 22 (*Irréductibles*)

Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Définition 23

On appelle factorisation de P sur $\mathbb{K}[X]$ l'écriture de P comme produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

Théorème 24 (*Factorisation complexe*)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, alors P s'écrit sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{r}(X - \alpha_i)^{m_i}$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et $m_i \in \mathbb{N}^\star$.
Cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près.

Remarques. • Le scalaire λ est le coefficient dominant de P.
• Le polynôme P admet r racines complexes distinctes, les α_i, de multiplicité m_i.

IV.2 Dans $\mathbb{R}[X]$

Propriété 25 (*Irréductibles*)

Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes à coefficients réels de degré 1 et ceux de degré 2 avec un discriminant strictement négatif.

Remarque. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est irréductible et de degré strictement supérieur à 1, alors P n'admet pas de racines réelles. Mais la réciproque est fausse !
Exo 8 : factoriser $X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$.

Théorème 26 (*Factorisation réelle*)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $(r,s) \in \mathbb{N}^2$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_r) \in \mathbb{R}^r$, $(m_1,\dots,m_r) \in (\mathbb{N}^\star)^r$, $(Q_1,\dots,Q_s) \in \mathbb{R}[X]^s$ et $(n_1,\dots,n_s) \in (\mathbb{N}^\star)^s$, où les Q_i sont des polynômes unitaires irréductibles de degré 2, tels que

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X-\alpha_i)^{m_i} \times \prod_{j=1}^{s} Q_j^{n_j}.$$

Cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près.

Remarques. • si $r = 0$ ou $s = 0$, par convention le produit est égal à 1.
• Le polynôme P admet alors r racines réelles distinctes, les α_i, de multiplicité m_i, et s couples de racines complexes conjuguées, de multiplicité n_j.

IV.3 Polynômes scindés

Propriété 27

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- la somme des multiplicités des racines de P est égale à son degré,
- P peut se factoriser en un produit de polynômes de degré 1 (avec d'éventuelles répétitions)

On dit alors que P est *scindé* sur $\mathbb{K}$.

Vocabulaire. On dit que P est *scindé à racines simples* ou *simplement scindé* s'il est scindé et toutes ses racines sont de multiplicité 1. Autrement dit, P se factorise en produit de polynômes de degré 1 tous différents, et admet exactement autant de racines (distinctes) que son degré.

Exo 9 : Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé à racines simples, alors P' l'est aussi.

Propriété 28

- Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.
- Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si toutes ses racines sont réelles.

Propriété 29 (*Lien entre coefficients et racines*)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ ses racines comptées avec multiplicité, avec $n = \deg(P)$. Alors en notant $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a

$$a_0 = a_n(-1)^n \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \quad \text{et} \quad a_{n-1} = -a_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

V Décomposition en éléments simple

Définition 30

On appelle *fraction rationnelle* un quotient de deux polynômes dont le dénominateur est non nul : $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ avec $Q \neq 0$.
Les *zéros* de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ sont les racines de P.
Les *pôles* de la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ sont les racines de Q.
On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Théorème 31 (*Décomposition en éléments simples (avec pôles simples)*)

Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tel que $Q(X) = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X-\alpha_i)$ avec les α_i deux à deux distincts (on dit que P/Q est à *pôles simples* dans $\mathbb{K}$). Alors si on note A le quotient de la division euclidienne de P par Q, il existe un unique $(a_1,\dots,a_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que

$$\frac{P}{Q} = A + \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{X-\alpha_i}.$$

Remarque. La décomposition en éléments simples pour des fractions rationnelles admettant des pôles multiples ou pour laquelle Q n'est pas scindé existe, mais la forme doit vous être donnée.

EXO 10 :

- Décomposer en éléments simples $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2+3X+2}$ et $\dfrac{4X^3}{X^4-1}$.
- 1. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.
  2. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,-1,0\}$, on définit $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
     (a) Déterminer une primitive de f.
     (b) Calculer les dérivées n-ièmes de f pour $n \in \mathbb{N}$.
  3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$.