Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités sur les espaces vectoriels

Définition 1

Soit E un ensemble non vide muni d'une addition notée $+$ et d'une multiplication externe notée . c'est-à-dire d'applications de la forme suivante :

$$+\begin{cases} E\times E & \to E \\ (u,v) & \mapsto u+v \end{cases} \qquad .\begin{cases} \mathbb{K}\times E & \to E \\ (\lambda,u) & \mapsto \lambda.u \end{cases}$$

On dit que $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* si ces opérations vérifient les propriétés de calcul suivantes :

1. (a) $\forall (u,v)\in E^2,\ u+v=v+u$ (*commutativité* de $+$)
   (b) $\forall (u,v,w)\in E^3,\ (u+v)+w=u+(v+w)$ (*associativité* de $+$)
   (c) $\exists 0_E\in E,\ \forall u\in E,\ u+0_E=u$
   (d) $\forall u\in E,\ \exists v\in E,\ u+v=0_E$ (u admet un *opposé*)
2. (a) $\forall u\in E, \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ (\alpha\beta).u=\alpha.(\beta.u)$ (*associativité* de .)
   (b) $\forall u\in E,\ 1.u=u$
3. (a) $\forall \alpha\in\mathbb{K},\forall(u,v)\in E^2,\ \alpha.(u+v)=\alpha.u+\alpha.v$ (*distributivité* de .)
   (b) $\forall (\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\forall u\in E,\ (\alpha+\beta).u=\alpha.u+\beta.u$ (*distributivité* de .)

Vocabulaire. Élément de E : *vecteur*, élément de $\mathbb{K}$: *scalaire*, 0_E : *vecteur nul.*

Propriété 2 (*Espaces vectoriels usuels*)

Les ensembles suivants (avec $n,p\in\mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{K}$) munis de leurs opérations usuelles sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

$$\mathbb{K}^n,\quad \mathbb{K}[X],\quad \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\quad \mathcal{F}(I,\mathbb{K}),\quad \mathbb{K}^{\mathbb{N}}.$$

L'ensemble $\mathbb{C}$ est à la fois un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Propriété 3 (*Autour du vecteur nul*)

Pour $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
- le vecteur nul 0_E est unique, et tout vecteur de E a un unique opposé.
- pour tout $u\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda.u=0_E \iff (\lambda=0 \text{ ou } u=0_E)$.

Notation. Pour u un vecteur, on note $-u$ son opposé et on a $-u=(-1).u$.

II Sous-espaces vectoriels

Dans la suite, $(E,+,.)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et n un entier non nul.

Définition 4 (*Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs*)

Pour $v_1,\dots,v_n$ et u des vecteurs de E, on dit que u est *combinaison linéaire* de la famille $(v_1,\dots,v_n)$ lorsqu'il existe des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ tels que

$$u=\lambda_1.v_1+\lambda_2.v_2+\dots+\lambda_n.v_n=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.v_k.$$

Définition 5 (*Sous-espace vectoriel*)

Pour F une partie non vide de E, on dit que F est un $\mathbb{K}$-*sous-espace vectoriel* de E lorsque F est stable par combinaison linéaire, ce qui est équivalent à

$$F\subset E \quad\text{et}\quad 0_E\in F \quad\text{et}\quad \forall(u,v)\in F^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \ u+\lambda.v\in F.$$

Exemples. • E et $\{0_E\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire **homogène** à n inconnues est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- L'ensemble des fonctions paires (resp. impaires, bornées, continues, dérivables, de classe C^∞, lipschitziennes, polynomiales...) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Remarque. Un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel F de E est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, muni des restrictions à F des opérations $+$ et . et avec $0_F=0_E$.

Conséquence. Les espaces $C^0(I,\mathbb{R})$ et $C^\infty(I,\mathbb{R})$ munis des opérations usuelles sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Définition 6 (*Sous-espace vectoriel engendré par une famille*)

Pour $v_1,\dots,v_n$ des vecteurs de E, on note $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(v_1,\dots,v_n)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille $(v_1,\dots,v_n)$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(v_1,\dots,v_n)=\big\{\lambda_1.v_1+\dots+\lambda_n.v_n\,;\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\big\}.$$

Propriété 7

L'ensemble $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(v_1,\dots,v_n)$ est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de E.

Vocabulaire. Si $n=1$ et $v_1\neq 0$, on parle de *droite vectorielle.*

Remarque. $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(v_1,\dots,v_n)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E qui contient chaque vecteur $v_1,\dots,v_n$.

Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

Propriété 8

L'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

EXO 1 : Est-ce que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel ? (exhiber un contre-exemple)

Propriété 9

L'ensemble $F+G$ défini par $F+G = \{v+w \mid v \in F,\ w \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle *somme* de F et G.

Définition 10

On dit que F et G sont en *somme directe* si tout vecteur u de $F+G$ admet une unique décomposition $u = v + w$, avec $v \in F$ et $w \in G$. On note alors $F \oplus G$ leur somme.

Propriété 11

$$F \oplus G \iff F \cap G = \{0_E\}.$$

Définition 12

On dit que F et G sont *supplémentaires* si F et G sont en somme directe et $F + G = E$, autrement dit $F \oplus G = E$.

EXO 2 : Montrer que l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. De même pour l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque. Un sous-espace vectoriel F peut admettre plusieurs supplémentaires.

EXO 3 : montrer que $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,0))$ a pour supplémentaire $G_1 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((0,1))$ dans $\mathbb{R}^2$, mais aussi $G_2 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,1))$.

III Familles génératrices, familles libres, bases

Définition 13 (*Famille génératrice d'un espace vectoriel*)

Pour F un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de E, une famille $(v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs est dite *génératrice* de F lorsque

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_n) = F.$$

EXO 4 : Déterminer une famille génératrice de

- l'ensemble des $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant $x + y + t = 0$ et $x + y - 2z = 0$.
- l'ensemble $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) + P'(2) = 0\}$.

Définition 14 (*Famille libre, famille liée*)

Une famille $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$ dite *libre* (ou *linéairement indépendante*) lorsque $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\lambda_1.v_1 + \cdots + \lambda_n.v_n = 0_E \implies \forall k \in [\![1, n]\!], \lambda_k = 0.$$

Si la famille n'est pas libre, on dit qu'elle est *liée*.

EXO 5 : Montrer que $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$ est liée si et seulement s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1.v_1 + \cdots + \lambda_n.v_n = 0_E$.

Remarques. Soit $\mathcal{F} = (v_1, \cdots, v_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

- Si $n = 1$, $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $v_1 \neq 0_E$.
- Si $n = 2$, $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires.
- Si $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(v_1, \dots, v_{n-1})$ alors la famille $\mathcal{F}$ est liée.

Définition 15 (*Base d'un (sous)-espace vectoriel*)

Une famille est une *base* de F lorsqu'elle est libre et génératrice de F.

Propriété 16 (*Unicité des coordonnées dans une base*)

Si $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de E, on a

$$\forall u \in E,\ \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ u = \lambda_1.v_1 + \cdots + \lambda_n.v_n.$$

Les scalaire $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés les *coordonnées* de u dans la base $\mathcal{B}$.

Exemples. Bases *canoniques* des espaces usuels :

- $\mathbb{K}^n$ admet pour base la famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs définis par
$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \cdots, \ e_n = (0, \dots, 0, 1).$$
- La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Les matrices ci-dessous forment la base dite canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$:
$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- L'espace des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ admet comme base canonique la famille des suites $(e^n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ définies par $e_k^n = \begin{cases} 1 \text{ si } k = n, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$