Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on note E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

I Applications linéaires

Définition 1 (*Application linéaire entre espaces vectoriels*)

Pour $f : E \to F$, on dit que f est une *application linéaire* lorsque

$$\forall (u,v) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(u+\lambda.v) = f(u) + \lambda.f(v).$$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
Les éléments de $\mathcal{L}(E,E)$, noté $\mathcal{L}(E)$, sont appelés *endomorphismes* de E.

Exemple filé : montrer que $\begin{array}{rccl} f_{interpol} : & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & P & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$ est une application linéaire.

Propriété 2 (*Image du vecteur nul et d'une combinaison linéaire*)

Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires et $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs de E :

$$f(0_E) = 0_F \qquad \text{et} \qquad f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k.v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.f(v_k).$$

Remarque importante : soient f et g des éléments de $\mathcal{L}(E,F)$ et $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$. Si $f(v_i) = g(v_i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f(v) = g(v)$ pour tout $v \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$. En particulier si les (v_i) forment une base de E, f est entièrement déterminée par la donnée des $f(v_i)$, pour $i \in [\![1,n]\!]$.

I.1 Opérations sur les applications linéaires

Propriété 3 (*Les applications linéaires forment un espace vectoriel*)

Pour f et $g \in \mathcal{L}(E,F)$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit les applications $f+g$ et $\lambda.f$ par

$$f+g : u \mapsto f(u)+g(u) \quad \text{et} \quad \lambda.f : u \mapsto \lambda.f(u)$$

Muni de ces opérations, $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de vecteur nul l'application nulle $0_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Propriété 4 (*Composition d'applications linéaires*)

Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, la composée $g \circ f : E \to G$ est linéaire, c'est-à-dire $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.
De plus, la composition d'applications linéaires est distributive par rapport à la somme.

I.2 Image et noyau d'une application linéaire

Définition 5 (*Image et noyau d'une application linéaire*)

Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on appelle *noyau* de f et on note

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}.$$

On appelle *image* de f l'ensemble $\mathrm{Im}(f) = \{f(u)\,;\, u \in E\}$.

Exemple filé : déterminer le noyau de $f_{interpol}$.

Propriété 6

Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exemple important : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit $\begin{array}{rccl} \phi_A : & \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ & X & \mapsto & AX \end{array}$.
On définit $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, \phi_A$, respectivement $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, \phi_A$, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, respectivement de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Propriété 7 (*Injectivité et noyau*)

Une application $f \in \mathcal{L}(E,F)$, est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Exemple important : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ϕ_A injective $\iff \mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, \phi_A = \{0_{\mathcal{M}_{p,1}}\}$.

Exo 1 : Montrer que f est injective $\iff$ pour toute famille libre $(v_1, \ldots, v_n)$, $(f(v_1), \ldots f(v_n))$ est libre.

Propriété 8 (*Famille génératrice de l'image*)

Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$, et $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille génératrice de E, on a

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(v_1), \ldots, f(v_n)\big).$$

Par conséquent,

$$f \text{ est surjective} \quad \iff \quad (f(v_1), \ldots, f(v_n)) \text{ est génératrice de } F.$$

II Isomorphismes

Définition 9

On appelle *isomorphisme* une application linéaire et bijective de E dans F.
Lorsque $E = F$, les isomorphismes sont appelés *automorphismes* de E.
L'ensemble des automorphismes de E est appelé *groupe linéaire* de E, et noté $GL(E)$.

Exemples : S'il existe un isomorphisme de E dans F, on dit que E et F sont *isomorphes*, et on note $E \simeq F$, qu'on peut alors *identifier* :

- $\mathbb{K}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.
- $\mathbb{K}^{n+1} \simeq \mathbb{K}_n[X]$, avec l'isomorphisme $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{n+1} & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ (a_0, \cdots a_n) & \mapsto & \sum_{k=0}^n a_k X^k. \end{array}$

Propriété 10 (*Isomorphisme et image d'une base*)

Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, on a

$$f \text{ est bijective} \quad \Longleftrightarrow \quad \big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big) \text{ est une base de } F.$$

Exemple filé : montrer que $(f_{interpol}(1), f_{interpol}(X), f_{interpol}(X^2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et en déduire que $f_{interpol}$ est un isomorphisme.
Application : déterminer $f_{interpol}^{-1}(1,0,0)$, $f_{interpol}^{-1}(0,1,0)$ et $f_{interpol}^{-1}(0,0,1)$.
En déduire pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ la forme de $f_{interpol}^{-1}(x,y,z)$, l'unique polynôme de degré ≤ 2 qui vaut x en -1, y en 0 et z en 1.

Propriété 11

Si f est un isomorphisme de E dans F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

III Endomorphismes remarquables

III.1 Homothéties et rotations

Définition 12

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application $h_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & \lambda u \end{array} \right.$ est un endomorphisme de E, appelé *homothétie* de rapport λ.

Propriété 13

Avec les notations ci-dessus : $h_\lambda \in GL(E) \Leftrightarrow \lambda \neq 0$, et dans ce cas $h_\lambda^{-1} = h_{1/\lambda}$.

Définition 14

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. L'application $r_\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta) \end{array} \right.$
est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, appelé *rotation* de rapport θ.

Propriété 15

Avec les notations ci-dessus : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ r_\theta \in GL(\mathbb{R}^2)$, avec $r_\theta^{-1} = r_{-\theta}$.

III.2 Projecteurs et symétries

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Pour u dans E, il existe une unique décomposition : $u = u_F + u_G$, avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$ appelés *composantes* de u selon F et G.

Définition 16

Le *projecteur sur F parallèlement à G* et la *symétrie par rapport à F parallèlement à G* sont définies par

$$p_{F//G} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & u_F \end{array} \right. \quad \text{et} \quad s_{F//G} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & u_F - u_G. \end{array} \right.$$

EXO 2 : faire un dessin, et vérifier que

$$p_{F//G} + p_{G//F} = \mathrm{Id}_E, \quad s_{F//G} = -s_{G//F} \quad \text{et} \quad p_{F//G} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Id}_E + s_{F//G}\right).$$

Propriété 17

- L'application $p_{F//G}$ est linéaire et a pour image F et pour noyau G.
- L'application $s_{F//G}$ est un automorphisme de E, d'inverse $s_{F//G}$.
- De plus, $G = \mathrm{Ker}(p_{G//F} - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(s_{F//G} + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(s_{F//G} - \mathrm{Id}_E)$.

Remarque : Si $f_1 \in L(F,E)$ et $f_2 \in L(G,E)$, il existe une unique application linéaire $f \in L(E)$ coïncidant avec f_1 sur F et f_2 sur G. Ainsi, $p_{F//G}$ est le seul endomorphisme de E coïncidant avec Id_E sur F et avec l'application nulle sur G, et $s_{F//G}$ le seul endomorphisme de E coïncidant avec Id_E sur F et $-\mathrm{Id}_E$ sur G.

Propriété 18

- Une application $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.
- Une application $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.