I Un peu de théorie des ensembles

Définition 1 (*Ensemble*)

Un ensemble est défini par ses *éléments*. Si x est un élément d'un ensemble E, on dit que x *appartient* à E et note « $x \in E$ ».

Notations.
- Si deux ensembles A et B ont les mêmes éléments, on note $A = B$.
- L'ensemble vide (qui ne contient aucun élément) est noté $\emptyset$.

Définition 2 (*Inclusion*)

Pour A, B deux ensembles, on dit que A est *inclus* dans B, noté $A \subset B$, lorsque tous les éléments de A sont aussi des éléments de B, c'est-à-dire :

$$A \subset B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x \in A,\ x \in B.$$

Si E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des *parties* de E, c'est-à-dire l'ensemble de tous les ensembles inclus dans E.

⚠ si $x \in E$ et $A \subset E$, on peut dire dans les deux cas que E *contient* x et A mais ça n'a pas du tout la même signification !

EXO 1 : pour $E = \{1, 2, 3\}$, déterminer $\mathcal{P}(E)$.

Raisonnement par double inclusion. Pour A et B deux ensembles, on a

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad A \subset B \text{ et } B \subset A.$$

On utilise la réciproque pour montrer que deux ensembles sont égaux.

Définition 3 (*Ensembles définis à partir d'un autre ensemble*)

Sélection. Si X est un ensemble et $P(x)$ est une propriété dépendant d'un élément $x \in X$, on peut définir l'ensemble E des éléments $x \in X$ tel que $P(x)$ est vrai :

$$E = \{x \in X \,|\, P(x)\} \subset X.$$

Autrement dit, pour tout $x \in X$,

$$x \in E \text{ si et seulement si } P(x) \text{ est vraie.}$$

Paramétrage. Si on a une fonction $f : X \to Y$ entre deux ensembles, on peut considérer l'ensemble F des images $f(x)$ d'éléments $x \in X$:

$$F = \{f(x)\,;\, x \in X\} \subset Y.$$

Autrement dit, pour tout $y \in Y$,

$$y \in F \text{ si et seulement si } \exists x \in X : y = f(x).$$

EXO 2 : pour $a < b$ des réels, décrire l'intervalle $]a, b]$ par une écriture paramétrée, et par une écriture par sélection.

EXO 3 : décrire des deux manières, à partir des ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, le cercle trigonométrique du plan complexe et l'ensemble des entiers naturels impairs.

Définition 4 (*Produit cartésien*)

Pour E et F deux ensembles, on note $E \times F$ l'ensemble des *couples* d'éléments de E et de F, c'est-à-dire :

$$E \times F = \big\{(x, y)\ ;\ x \in E \text{ et } y \in F\big\}.$$

Pour E un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$, on note E^n l'ensemble des n-uplets (ou des n-listes) d'éléments de E :

$$E^n = \big\{(x_1, \ldots, x_n)\ ;\ \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in E\big\}.$$

Définition 5 (*Opération sur les ensembles*)

À partir de deux ensembles A et B (inclus dans un ensemble E), on définit
- ▶ le *complémentaire* de A dans E : $E \setminus A = \overline{A} = \{x \in E \,|\, x \notin A\}$,
- ▶ la *réunion* de A et B : $A \cup B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$,
- ▶ l'*intersection* de A et B : $A \cap B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- ▶ l'ensemble A privé des éléments de B : $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

On dit que A et B sont *disjoints* si $A \cap B$ est l'ensemble vide.

Propriété 6

Soient A et B deux ensembles. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $A \subset B$, (ii) $A \cup B = B$, (iii) $A \cap B = A$.

EXO 4 : *Distributivité de l'intersection et de la réunion.*
Pour A, B et C trois parties d'un ensemble E, montrer par double inclusion que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Propriété 7 (*Lois de De Morgan pour les ensembles*)

Pour A et B deux parties d'un ensemble E, on a

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

II Applications entre ensembles

À partir d'ici, soient E, F, G et H des ensembles.

Définition 8

Une *application* $f : E \to F$ est la donnée, pour tout élément $x \in E$, d'un élément $f(x) \in F$.
On dit que E est le *domaine* (ou *ensemble de départ*) de f et F est son *ensemble d'arrivée* (ou *codomaine*).
Pour résumer cela, on utilise la notation suivante : $f : \begin{cases} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) = \cdots \end{cases}$

Notation. L'ensemble des applications $E \to F$ est noté F^E.

Exemples. ▶ Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^I$ est l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs réelles.

- ▶ On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles ($u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$).
- ▶ L'application *identité* de l'ensemble E est définie par $\mathrm{Id}_E : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x. \end{cases}$
- ▶ Soient Ω un ensemble et $A \subset \Omega$. On définit la *fonction indicatrice (ou caractéristique)* de A par $\mathbb{1}_A : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A\,; \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{cases}$

Exo 5 : Si A et B sont deux parties d'un ensemble Ω, déterminer $\mathbb{1}_{\bar{A}}$, $\mathbb{1}_{A\cap B}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

Définition 9 (*Composition d'applications*)

Soients $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux applications telles que $F \subset G$.
La *composée* de f par g, notée $g \circ f$, est l'application définie sur E à valeurs dans H telle que

$$\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Exo 6 : on considère $s : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{cases}$ et $d : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$.
Déterminer les points invariants par s et interpréter s géométriquement à l'aide de l'image de quelques antécédents. Que vaut $s \circ s$? et $d \circ s$?

Définition 10 (*Restriction*)

Soient $f : E \to F$ une application et $A \subset E$.
On définit la *restriction de f à A*

$$f_{|A} : \begin{cases} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x). \end{cases}$$

Exo 7 : quel est le plus grand intervalle I contenant 0 tel que $\sin_{|I}$ est croissante ?

II.1 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Vocabulaire. Soit $f : E \to F$.

- ▶ Pour $x \in E$, l'élément $f(x)$ de F est appelé l'*image* de x par f.
- ▶ Pour $y \in F$, un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ est un *antécédent* de y par f. Autrement dit, les antécédents de y par f sont les solutions de l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.

⚠ En général, un élément de l'ensemble d'arrivée peut admettre un, plusieurs ou aucun antécédent.

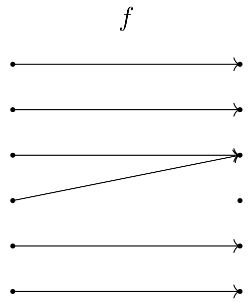
Définition 11 (*Injectivité, surjectivité, bijectivité*)

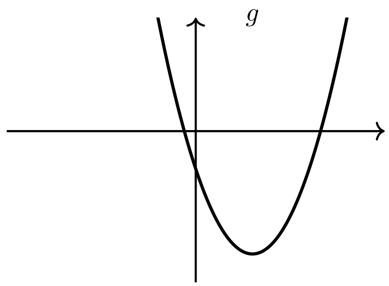
- ▶ Une application $f : E \to F$ est dite *injective* sur E si et seulement si tout élément de F admet *au plus* un antécédent par f.
- ▶ Une application $f : E \to F$ est dite *surjective* sur E si et seulement si tout élément de F admet *au moins* un antécédent par f.
- ▶ Une application $f : E \to F$ est dite *bijective* si elle est à la fois injective ou surjective, c'est-à-dire si tout élément de F admet *exactement* un antécédent par f.

Propriété 12 (*Avec des quantificateurs*)

- ▶ f est injective ssi $\forall (x,\tilde{x}) \in E^2,\quad f(x) = f(\tilde{x}) \implies x = \tilde{x}$.
- ▶ f est surjective ssi $\forall y \in F,\ \exists\, x \in E,\ f(x) = y$.
- ▶ f est bijective ssi $\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ f(x) = y$.

Exo 8 : Les deux fonctions représentées ci-dessous ne sont ni injectives, ni surjectives. Entourer en rouge ce qu'interdit l'injectivité, et en bleu ce qu'interdit la surjectivité.





Propriété 13 (*Stabilité par composition*)

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to H$ deux applications. Alors

- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

La réciproque est partielle :

- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Théorème 14 (*Bijectivité et réciproque*)

Soit $f : E \to F$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est bijective.

(ii) f admet une *réciproque* : il existe une fonction $g : F \to E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \qquad f \circ g = \mathrm{Id}_F \,.$$

En outre, si f admet une fonction réciproque g, celle-ci est unique.
On la note alors $f^{-1} : F \to E$.

Si $f : E \to F$ est bijective, on peut définir son application réciproque de la façon suivante : $f^{-1} : \begin{cases} F \longrightarrow E \\ y \longmapsto f^{-1}(y) = \text{unique antécédent de } y \text{ par } f. \end{cases}$

EXO 9 : Soit $q : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array} \right.$ Est-elle injective ? surjective ? déterminer un intervalle I le plus grand possible tel que $q_{|I}$ soit bijective ; quelle est sa réciproque ?

Propriété 15 (*Chaussettes et chaussures*)

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to H$ deux fonctions bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective, de réciproque $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

II.2 Image directe, image réciproque

Définition 16

Soit $f : E \to F$ une application.

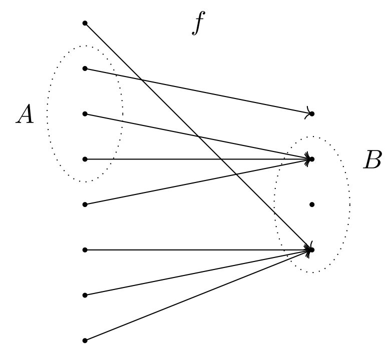
- Si $A \subset E$, *l'image directe de* A est l'ensemble des éléments de F qui ont au moins un antécédent dans A :

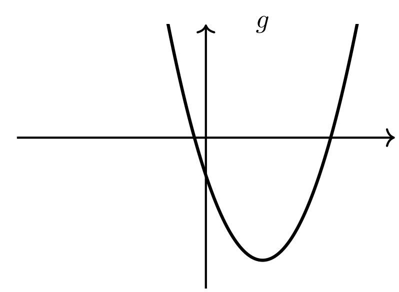
$$f(A) = \{f(x)\,;\, x \in A\} \subset F.$$

- Si $B \subset F$, *l'image réciproque de* B est l'ensemble des antécédents des éléments de B :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B\} \subset E.$$

EXO 10 : sur le schéma de gauche, représenter $f(A)$ et $f^{-1}(B)$. Sur le schéma de droite, déterminer graphiquement $g(]-\infty, 0])$ et $g^{-1}(\mathbb{R}_+^\star)$.





⚠ La notation peut laisser penser que f^{-1} existe (et donc que la fonction est bijective) même si ce n'est pas le cas !

EXO 11 : Si $f : E \to F$ est bijective et que $B \subset F$, montrer que l'image réciproque de B par f et l'image directe de B par f^{-1} coïncident.

EXO 12 : Si $q : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2, \end{array} \right.$ déterminer $q(\mathbb{R})$, $q^{-1}(\mathbb{R}_-)$, $q^{-1}(\mathbb{R}_-^\star)$, $q^{-1}([1,4])$.

Soit $f : E \to F$ une application. On a toujours $f^{-1}(F) = E$.
En revanche, $f(E) = F$ si et seulement si f est surjective.
Si f est injective, alors elle induit une application bijective $\tilde{f} : E \to f(E)$.