Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et les familles de vecteurs considérées ont un nombre fini de vecteurs.

I Théorie de la dimension

- ▲ Pour v_1, …, v_k des vecteurs de E, l'ensemble $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ est inchangé si on modifie l'ordre des vecteurs, ou si on multiplie l'un des v_i par un $\lambda \neq 0$.
- ▲ Si $u \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$, on a $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k, u) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$.
- ▲ Si $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_k)$ est libre et $u \notin \text{Vect}(\mathcal{F})$, alors $(v_1, \dots, v_k, u)$ est libre.

Propriété 1

Pour E un espace vectoriel qui admet une famille génératrice $\mathcal{G}$:
- on peut extraire de $\mathcal{G}$ une base de E.
- si $\mathcal{F}$ est une famille libre de vecteurs de E, on peut la compléter avec des vecteurs de $\mathcal{G}$ pour obtenir une base de E (*base incomplète*).

Notation : pour $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs, on note $|\mathcal{F}|$ son nombre de vecteurs.

Théorème 2 (*de la dimension finie*)

Pour $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux familles de vecteurs de E :
- si $\mathcal{F}_1$ est libre et $\mathcal{F}_2$ est génératrice de E, alors $|\mathcal{F}_1| \leqslant |\mathcal{F}_2|$.
- si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont des bases de E, alors $|\mathcal{F}_1| = |\mathcal{F}_2|$.

Définition 3 (*Dimension d'un espace vectoriel*)

Un espace vectoriel E est dit de dimension finie lorsqu'il admet une base. On note alors $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ le nombre de vecteurs d'une base de E.

Convention : $\dim_{\mathbb{K}}(\{0_E\}) = 0$.

Conséquence : si E est un espace de dimension finie n, alors une famille libre de vecteurs compte au plus n éléments, et une famille génératrice au moins n éléments.

Propriété 4 (*Dimension des espaces vectoriels usuels*)

Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on a

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n, \quad \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n+1, \quad \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np.$$

Remarques : ▲ $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, ne sont pas de dimension finie.
▲ La dimension dépend du corps $\mathbb{K}$: $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ mais $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on ne précise pas le corps.

Propriété 5 (*Caractérisation des bases avec la dimension*)

Si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de n vecteurs de E, avec $n = \dim(E)$. Alors

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice de } E \iff \mathcal{F} \text{ est une base de } E.$$

EXO 1 : ▲ montrer que la famille $((1,3,4),(4,0,0),(2,1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
▲ montrer que $(X^2-1,(X-1)^2,(X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Propriété 6 (*Sous-espace vectoriel en dimension finie*)

Si F est un sous-espace vectoriel de E, avec E de dimension finie, alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
De plus, il existe une base de E *adaptée* à F et F admet un supplémentaire dans E, de dimension $\dim(E) - \dim(F)$.

Vocabulaire : on appelle *droite vectorielle* un sev de dimension 1, *plan vectoriel* un sev de dimension 2, et *hyperplan* de E un sev de dimension $\dim(E) - 1$.

EXO 2 : Déterminer un supplémentaire de $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$.

Propriété 7 (*Égalité entre sev à l'aide de la dimension*)

Pour F et G deux sous-espaces vectoriels de E (de dim. finie), on a

$$\big(F \subset G \quad \text{et} \quad \dim(F) = \dim(G)\big) \iff F = G.$$

Propriété 8 (*Formule de Grassmann*)

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie, alors

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G.$$

Théorème 9 (*Caractérisations de la supplémentarité*)

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E, de dimension finie.
- F et G sont en somme directe $\iff \dim(F+G) = \dim F + \dim G$.
- Les assertions suivantes sont équivalentes :
  - (i) $E = F \oplus G$,
  - (ii) $F + G = E$ et $\dim E = \dim F + \dim G$,
  - (iii) $F \cap G = \{0\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.

EXO 3 : Montrer que $\{P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = P'(0) = P(3) = 0\}$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.

II Rang d'une famille de vecteurs

Définition 10 (*Rang d'une famille de vecteurs*)

Le rang d'une famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_p)$, noté $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_p)$, est la dimension de l'espace vectoriel qu'elle engendre.

Propriété 11

Si $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille de vecteurs de E.

- $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_p) \leq p$ et $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_p) \leq \dim(E)$
- $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_p) = p$ si et seulement si $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille libre,
- $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_p) = \dim(E)$ si et seulement si $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille génératrice de E.

EXO 4 : Déterminer dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ le rang de la famille (A_1, A_2, A_3, A_4),
avec $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

III Applications linéaires en dimension finie

III.1 Rang d'une application linéaire

Définition 12 (*Rang d'une application linéaire*)

On dit qu'une application linéaire $f \in (E, F)$ est de *rang fini* si son image $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, et on appelle *rang* de f la dimension de cette image :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Remarque. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))$ et $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\,(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Propriété 13

- Si E est de dimension finie, alors f est de rang fini et $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(E)$,
- si F est de dimension finie, alors f est de rang fini et $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(F)$.

Propriété 14 (*Rang et composition*)

Soient E, F et G trois ev de dimension finie et $f \in (E, F)$ et $g \in (F, G)$.

- $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}\, f, \mathrm{rg}\, g)$,
- Si g est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$,
- Si f est un isomorphisme, alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

III.2 Théorème du rang et conséquences

Théorème 15 (*du rang*)

Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie,

- Si S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, f$ dans E, alors f induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}\, f$.
- On a la *formule du rang*

$$\dim E = \mathrm{rg}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f.$$

Application : on appelle *forme linéaire* sur E les applications de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Si E est de dimension finie, montrer que le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan de E.

Propriété 16 (*Injectivité, surjectivité en dimension finie*)

Si E et F sont de dimension finie et $f \in (E, F)$, alors :

- si f est injective, $\dim(E) \leq \dim(F)$,
- si f est surjective, $\dim(F) \leq \dim(E)$,
- si $\dim(E) = \dim(F)$, alors

$$f \text{ injective } \iff f \text{ surjective } \iff f \text{ bijective }.$$

En particulier, un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est injectif $\iff$ surjectif $\iff$ bijectif.

EXO 5 : Déterminer la dimension de l'ensemble des suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$ pour $n \geq 0$.

Propriété 17

Si E est de dimension n, il existe un isomorphisme linéaire $f : E \to \mathbb{K}^n$.
En particulier deux espaces vectoriels de même dimension sont isomorphes.