Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Étude des séries

I.1 Définitions

Définition 1 (*Sommes partielles*)

Soit $(u_k)_{k\geqslant n_0}$ une suite de nombres réels ou complexes définie à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \geqslant n_0$, on appelle *somme partielle* de rang n de terme général (u_k) la somme $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

Propriété 2 (*Terme général en fonction des sommes partielles*)

Pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$, et $u_{n_0} = S_{n_0}$.

Définition 3 (*Nature et somme d'une série*)

La *série* de terme général u_k, notée $\sum_{k\geqslant n_0} u_k$, est *convergente* lorsque la suite des sommes partielles associées (S_n) est convergente.
Dans ce cas, on note $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n$: c'est la *somme* de la série.
Dans le cas contraire, on dit que la série est *divergente*.

Propriété 4

Si $\sum_{k\geqslant n_0} u_k$ est une série convergente, alors $u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Vocabulaire. Si (u_k) ne tend pas vers 0, $\sum u_k$ est dite *grossièrement* divergente.

Attention ! La réciproque est fausse : la série harmonique $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$ est divergente.

EXO 1 : Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{1/n} - 1}$.

Propriété 5 (*Reste d'une série convergente*)

Soit $n \geqslant n_0$. La série $\sum_{k\geqslant n_0} u_k$ converge si et seulement si $\sum_{k\geqslant n+1} u_k$ converge.
En cas de convergence, on a $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et on peut définir $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, le *reste d'indice* n de la série $\sum u_k$, qui vérifie $R_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

I.2 Propriétés immédiates

Propriété 6 (*Linéarité de la somme pour des séries convergentes*)

Si $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont des séries convergentes et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum(u_k + \lambda v_k)$ est convergente et l'on a $\sum_{k=n_0}^{+\infty} (u_k + \lambda v_k) = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k + \lambda \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$.

Autrement dit, l'ensemble des suites de série convergente est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et l'application qui à une suite associe la somme de sa série est linéaire.

Propriété 7 (*Changement d'indice*)

Pour $\sum_{k\geqslant n_0} u_k$ une série convergente et $p \in \mathbb{Z}$, on a $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{i=n_0+p}^{+\infty} u_{i-p}$.

EXO 2 : Calculer le reste d'une série géométrique de raison q de module < 1 de deux manières différentes.

Propriété 8 (*Série télescopique*)

Si (a_k) est une suite de réels ou complexes telle que $u_k = a_{k+1} - a_k$ pour tout $k \geqslant n_0$, alors la série $\sum u_k$ converge si et seulement si la suite (a_k) converge.
En cas de convergence, on a $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n_0}^{+\infty} (a_{k+1} - a_k) = \lim_{k\to\infty} a_k - a_{n_0}$.

EXO 3 : Nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

II Séries de référence

Propriété 9 (*Série exponentielle*)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{k\geqslant 0} \dfrac{z^k}{k!}$ est convergente et sa somme est $\exp(z)$.

EXO 4 : Calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{2^n}{(n+1)!}$.

EXO 5 : Montrer que $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} \dfrac{3^n}{(2n)!} = \mathrm{ch}(\sqrt{3})$.

Propriété 10 (*Série géométrique*)

Pour $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{k \geqslant 0} z^k$ converge si et seulement si $|z| < 1$.

En cas de convergence, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$.

EXO 6 : Calculer la somme de de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{2^n + 1}{3^{2n}}$.

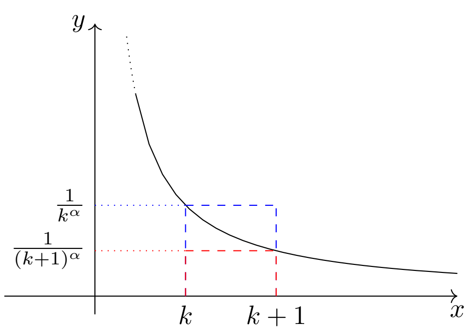
Remarque. Séries géométriques « dérivées » (classiques mais pas au programme) : si $|z| < 1$, alors

- la série $\sum kz^{k-1}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} kz^{k-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$,
- la série $\sum k(k-1)z^{k-2}$ converge et $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)z^{k-2} = \frac{2}{(1-z)^3}$.

Propriété 11 (*Série de Riemann*)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

La preuve repose sur une comparaison avec l'intégrale de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$:



III Critères de convergence pour les séries

Propriété 12 (*Convergence monotone version séries*)

Soit $\sum u_k$ une série **à termes réels positifs** et (S_n) la suite des sommes partielles associées. La série $\sum u_k$ converge si et seulement si (S_n) est majorée.

Propriété 13 (*Comparaison*)

Soient $\sum u_k$ et $\sum v_k$ deux séries **à termes réels**. On suppose qu'à partir d'un certain rang n_0 : $0 \leq u_n \leq v_n$.
Alors :

- Si $\sum v_k$ est convergente, alors $\sum u_k$ est convergente, et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.
- Si $\sum u_k$ est divergente, alors $\sum v_k$ est divergente.

EXO 7 : nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1+(-1)^n}{n^2}$ et de $\sum_{n \geq 1} \frac{2+\cos(n)}{n}$.

Théorème 14 (*Comparaison pour les séries à termes positifs*)

Soient $\sum u_k$ et $\sum v_k$ deux séries **à termes réels positifs**.

- Si $u_k = o(v_k)$ et $\sum v_k$ est convergente, alors $\sum u_k$ est convergente.
- Si $u_k \underset{k \to \infty}{\sim} v_k$ alors les séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont de même nature.
- Si $u_k = O(v_k)$ et $\sum v_k$ est convergente, alors $\sum u_k$ est convergente.

Remarques : ▶ les contraposées permettent de montrer que des séries divergent.
▶ si (u_n) admet un équivalent (v_n) positif, alors u_n est positif à partir d'un certain rang et les séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont de même nature.

EXO 8 : nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$, de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$ et de $\sum_{n \geq 1} e^{1/n^2} - 1$.

Définition 15 (*Convergence absolue*)

Une série $\sum u_k$, dont les termes sont de signes quelconques, est dite *absolument convergente* lorsque $\sum |u_k|$ est convergente.
On dit alors que la suite (u_k) est *sommable*.
Une série convergente mais pas absolument convergente est dite *semi-convergente* (notion hors-programme).

EXO 9 : montrer que la *série harmonique alternée* $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ est semi-convergente.

Le raisonnement utilisé sera applicable à toutes les *séries alternées* (*i.e.* de terme général convergeant vers 0 et vérifiant $u_n u_{n+1} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Propriété 16 (*Convergence absolue implique convergence simple*)

Si la série $\sum u_k$ converge absolument, alors $\sum u_k$ converge.

EXO 10 : nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n)}{n^2}$.