I Définitions générales

Dans ce chapitre, on note $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé **fini** et E un ensemble - qui sera très souvent $\mathbb{N}$.

Définition 1 (*Variable aléatoire*)

On appelle *variable aléatoire* une application de la forme $X : \Omega \to E$.
Si $E \subset \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle.

Remarque. L'ensemble $X(\Omega) = \{X(\omega)\,;\,\omega \in \Omega\} \subset E$ des valeurs possibles pour X est un ensemble fini, de cardinal inférieur à celui de Ω.

Définition 2 (*Évènements définis à partir d'une variable aléatoire*)

Pour $A \subset E$ et X une v.a. sur Ω, on définit l'évènement

$$\{X \in A\} = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in A\}.$$

Si $E = \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$\{X = x\} = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = x\}$$

$$\{X \leqslant x\} = X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leqslant x\}$$

Notation. On note les proba de ces évènements $\mathbb{P}(X \in A)$, $\mathbb{P}(X = x)$ et $\mathbb{P}(X \leq x)$.
Remarque. Pour X une v.a., la famille d'évènements $\big(\{X = x\}\big)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements de Ω, appelé *système complet associé à* X.

Définition 3 (*Loi de probabilité*)

On appelle *loi de probabilité* d'une variable aléatoire X la donnée des $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$. Cela définit une mesure de probabilité sur $X(\Omega)$, notée $\mathbb{P}_X$: si $S \subset X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}_X(S) = \mathbb{P}(X \in S) = \sum_{x \in S} \mathbb{P}(X = x).$$

On dit que deux variables aléatoires X et Y ont même loi de probabilité si $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$. On note alors $X \sim Y$.

EXO 1 : On tire deux boules d'une urne contenant 3 boules bleues, 1 boule rouge et 6 boules jaunes, et on considère la variable X donnant le nombre de boules bleues obtenues. Déterminer la loi de X.
Pour cela, dresser un tableau donnant les $\mathbb{P}(X = k)$ *pour* k *parcourant* $X(\Omega)$.

Définition 4 (*Fonction de répartition*)

La *fonction de répartition* d'une variable aléatoire réelle X est la fonction croissante $\mathbb{F}_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\mathbb{F}_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$.

EXO 2 : déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X donnant la plus grande valeur lors d'un jet de deux dés. En déduire la loi $\mathbb{P}_X$.

Définition 5 (*Composition avec une fonction*)

Pour une variable aléatoire X et une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ avec $X(\Omega) \subset A$, on peut considérer la variable aléatoire $f(X) = f \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Remarque. Si $X \sim Y$ sont deux variables aléatoires de même loi, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Définition 6 (*Loi conditionnelle*)

Si X est une variable aléatoire sur Ω et A est un évènement de Ω tel que $\mathbb{P}(A) > 0$, on définit la *loi conditionnelle de* X *sachant* A par :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x \,|\, A) = \frac{\mathbb{P}(\{X = x\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

II Lois usuelles

Définition 7 (*Loi certaine*)

Une variable aléatoire X suit une *loi certaine* lorsqu'elle prend une seule valeur, c'est-à-dire s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $X(\Omega) = \{a\}$. Alors $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

Définition 8 (*Loi uniforme, loi uniforme généralisée*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X suit la *loi uniforme sur* $[\![1, n]\!]$ lorsque :

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \quad \text{et pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On note alors $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.
On dit que X suit une *loi uniforme généralisée* si, en notant $E = X(\Omega)$,

$$\text{pour tout } x \in E,\ \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{|E|}.$$

On note alors $X \sim \mathcal{U}(E)$.

Définition 9 (*Loi de Bernoulli*)

Une variable aléatoire X suit la *loi de Bernoulli* de paramètre $p \in]0,1[$ lorsque

$$X(\Omega) = \{0,1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X=1) = p$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(1,p)$.

Exo 3 : Pour chaque expérience aléatoire suivante, donner une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli : tirage d'une boule dans une urne contenant n boules rouges et p boules bleues, pile ou face avec une pièce biaisée.

Définition 10 (*Variable indicatrice d'un évènement*)

Pour $A \subset \Omega$ un évènement, on note $\mathbb{1}_A$ la variable aléatoire indicatrice de A, définie pour tout $\omega \in \Omega$ par $\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Exo 4 : Soient A et B sont deux évènements. Déterminer $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$, $1 - \mathbb{1}_A$. Quelle est l'indicatrice de $A \cup B$? À quelle condition $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ est-elle une indicatrice ?

Propriété 11

La variable aléatoire $\mathbb{1}_A$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \mathbb{P}(A)$.

Exo 5 : Soit A un évènement de proba $1/2$. Montrer que $\mathbb{1}_A \sim \mathbb{1}_{\bar{A}}$. Est-ce que $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{\bar{A}}$ et $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_A$ ont la même loi ?

Définition 12 (*Loi binomiale*)

Une variable aléatoire X suit la *loi binomiale* de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ lorsque

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \ .$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Définition 13 (*Schéma de Bernoulli*)

On appelle *schéma de Bernoulli* une expérience aléatoire constitué d'une répétition de n expériences identiques et indépendantes à deux issues (par exemple succès ou échec).

Propriété 14 (*Nombre de succès et loi binomiale*)

Le nombre de succès **dans un schéma de Bernoulli** avec n répétitions et une probabilité de succès $p \in]0,1[$ (à chaque répétition) suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

III Espérance et variance

Définition 15 (*Espérance d'une variable aléatoire réelle*)

Pour X une variable aléatoire réelle, on définit l'*espérance* de X par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x).$$

Vocabulaire : on dit que X est *centrée* lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$.

Exo 6 : déterminer l'espérance du numéro X obtenu lors d'un lancer de dé à 6 faces équilibré.

Propriété 16 (*Espérances et variances usuelles*)

Si $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in]0,1[$, et X est une v.a. réelle de loi usuelle, alors :

si $X \sim$	a	$\mathcal{U}([\![1,n]\!])$	$\mathcal{B}(p)$	$\mathcal{B}(n,p)$
$\mathbb{E}(X) =$	a	$\dfrac{n+1}{2}$	p	np
$\mathbb{V}(X) =$	0	$\dfrac{n^2-1}{12}$	$p(1-p)$	$np(1-p)$

En particulier $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$ si A est un évènement de Ω.

Propriété 17 (*Linéarité de l'espérance*)

Pour X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω et $a, b \in \mathbb{R}$, $aX + bY$ est une variable aléatoire et son espérance vérifie :

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) \ .$$

Exo 7 : Un joueur joue à pile ou face avec une pièce truquée, qui donne pile avec une probabilité p. En misant 20 euros, il peut lancer 12 fois la pièce, et gagne 3 euros à chaque fois qu'il obtient pile. À quelle condition a-t-il intérêt à jouer ?

Propriété 18 (*Positivité, croissance, inégalité triangulaire*)

- si X est une variable aléatoire à valeurs positives, $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
- si X et Y sont deux v.a. réelles telles que $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
- si X est une variable aléatoire réelle, $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.

Théorème 19 (*de transfert*)

Pour une variable aléatoire X et une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ avec $X(\Omega) \subset A$, l'espérance de $f(X) = f \circ X$ peut se calculer à partir de la loi de X :

$$\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k)\mathbb{P}(X = k) \ .$$

EXO 8 : calculer $\mathbb{E}(\exp(X))$ pour $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Définition 20 (*Variance*)

Pour X une variable aléatoire réelle, on définit :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big).$$

Remarque. Si $X \sim Y$, alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y)$.

Propriété 21

Pour X une variable aléatoire réelle, on a la formule

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big) = \mathbb{E}\big(X^2\big) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Vocabulaire : • l'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.
• on dit que X est *réduite* lorsque $\mathbb{V}(X) = 1$.

EXO 9 : quel est l'écart-type du résultat $X \in \{0,1\}$ d'un tir de pile ou face ? du numéro X obtenu lors d'un lancer de dé à 6 faces équilibré ?

Propriété 22 (*Transformation affine et variance*)

Pour X une variable aléatoire réelle et $a, b \in \mathbb{R}$ on a $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

EXO 10 : Soit X une variable aléatoire réelle finie. Déterminer a et b des réels tels que $Y = aX + b$ soit une variable aléatoire réduite centrée.

EXO 11 : Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire de loi uniforme généralisée $X \sim \mathcal{U}(\llbracket a, b\rrbracket)$, avec $a < b$ des entiers, en se ramenant au cas uniforme sur $\llbracket 1, n\rrbracket$ à l'aide d'une transformation affine.

Définition 23 (*Covariance*)

Si X et Y sont des variables aléatoires réelles définies sur le même univers, la *covariance* de X et Y est donnée par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y),$$

de sorte que $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

IV Couples de variables aléatoires

Soient $X : \Omega \to E_1$ et $Y : \Omega \to E_2$ deux variables aléatoires sur le même univers Ω.

⚠ si $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on note $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$.
Avec cette notation, on peut considérer la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$:

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x \,|\, Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}.$$

Définition 24 (*Loi conjointe, loi marginale*)

On appelle *loi conjointe* de X et Y la loi de la variable aléatoire

$$(X,Y) : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E_1 \times E_2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)), \end{array} \right.$$

Elle est donnée par les probas $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$ pour $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, parfois présentées dans un tableau à double entrée.
Les lois de X et de Y sont alors appelées les *lois marginales* du couple (X,Y).

Propriété 25

La loi marginale de Y se déduit de la loi conjointe (X,Y) par la relation :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

EXO 12 : Soient deux variables aléatoires $X, Y : \Omega \to \llbracket 0, 2\rrbracket$ dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant, où a est un réel à déterminer. Calculer les lois marginales de X et de Y.

	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$Y=0$	$1/10$	$2/5$	0
$Y=1$	$1/10$	0	0
$Y=2$	0	$1/5$	a

Théorème 26 (*de transfert, généralisé*)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et X et Y des variables aléatoires réelles. Alors :

$$\mathbb{E}(f(X,Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} f(x,y) \cdot \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Définition 27 (*Variables aléatoires indépendantes*)

Deux variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si :

$$\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y),$$

ou de manière équivalente si $\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ avec $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$,

$$\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \mathbb{P}(X = x).$$

EXO 13 : En utilisant la théorème de transfert, déterminer $\mathbb{E}(|X - Y|)$ pour X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Propriété 28 (*Indépendance de variables aléatoires/évènements*)

- Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour tous $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendants.
- Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Remarque. Soient X et Y deux variables aléatoires et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Si les variables X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont également.

Propriété 29 (*Indépendance et espérances*)

Si X et Y sont indépendantes, alors leur covariance est nulle :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

EXO 14 : La réciproque est fausse ! soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim Y \sim \mathcal{B}(p)$, avec $p \in]0,1[$. Soit $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Déterminer la loi conjointe de U et V et leur covariance. Sont-elles indépendantes ?

Définition 30 (*Indépendance mutuelle de variables aléatoires*)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires sur un même univers Ω. Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont dites *mutuellement indépendantes* si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = x_i\} \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

Remarque. Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors, pour tout $(A_1, \dots, A_n) \subset X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, les événements $(\{X_i \in A_i\})_{1 \le i \le n}$ sont mutuellement indépendants.

Propriété 31 (*Somme de variables aléatoires de Bernoulli*)

Soient $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{B}(p)$ mutuellement indépendantes. Alors :

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p).$$

Propriété 32 (*Lemme des coalitions*)

Soit, $0 < p < n$ des entiers et $X_1 : \Omega \to E_1, \dots, X_n : \Omega \to E_n$ des variables aléatoires indépendantes.
Soit $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ et $g : E_{p+1} \times \cdots \times E_n \to G$ deux applications.
Alors les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

V Inégalités de concentration

Théorème 33 (*Inégalité de Markov*)

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire **positive** et $a > 0$. On a alors

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

EXO 15 : soit $X \sim \mathcal{B}(100, \frac{1}{5})$. Donner une majoration de $\mathbb{P}(|X - 20| \geq 10)$ et de $\mathbb{P}(X \leq 5 \text{ ou } X \geq 35)$.

Théorème 34 (*Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*)

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle et $a > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.$$

EXO 16 : soit Y une variable aléatoire à valeurs entières telle que $\mathbb{E}(Y) = 5$ et $\mathbb{V}(Y) = 1$. Donner une majoration de $\mathbb{P}(|Y - 5| \geq 2)$ et de $\mathbb{P}(Y > 8)$.

Conséquence : Loi faible des grands nombres.
Soient $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note $S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ la moyenne des variables aléatoires, d'espérance $\mathbb{E}(X_1)$. Alors, pour tout $a > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(X_1)| \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n\,a^2}.$$

EXO 17 : Combien de fois faut-il lancer une pièce équilibrée pour être sûr à 99% que la proportion de pile est comprise entre 0,45 et 0,55 ?