I Rang d'une matrice

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soient n et p des entiers et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice.
En identifiant les éléments de $\mathbb{K}^n$ et les colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a défini l'*application linéaire canoniquement associée à A* par $\phi_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array}$.

- ▶ $\operatorname{Ker} A := \operatorname{Ker} \phi_A$ est l'ensemble des solutions du système linéaire à n équations et p inconnues $AX = 0$. Les lignes de A donnent les équations de ce système.
- ▶ Les colonnes de $A = \left(\boxed{A_1} \ \vdots \ \vdots \ \boxed{A_p} \right)$ sont les images de la base canonique de $\mathbb{K}^p$ par ϕ_A. Elles engendrent $\operatorname{Im} A := \operatorname{Im} \phi_A = \operatorname{Vect}(A_1, \cdots, A_n)$.

Définition 1 (*Rang d'une matrice*)

On définit $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \phi_A = \operatorname{rg}(A_1, \cdots A_p)$.

Propriété 2

1. Comme pour les applications linéaires :
   (a) $\operatorname{rg} A \leq \min(n,p)$,
   (b) $\operatorname{rg} BA \leq \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$ pour toute matrice compatible B,
   (c) $\dim \operatorname{Ker} A = p - \operatorname{rg} A$ (théorème du rang).
2. Si $p = n$ (matrice carrée), on a les équivalences :
   $$A \text{ inversible } \iff \operatorname{rg} A = n \iff \operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n \iff \operatorname{Ker} A = \{0\}.$$
   $$\big(\Leftrightarrow \ \phi_A \text{ inversible } \Leftrightarrow \operatorname{rg} \phi_A = n \Leftrightarrow \operatorname{Im} \phi_A = \mathbb{K}^n \Leftrightarrow \operatorname{Ker} \phi_A = \{0\} \big)$$
   Dans ce cas $\phi_{A^{-1}} = (\phi_A)^{-1}$.
3. Le rang d'une matrice est conservé par multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible.
4. Rang de la transposée : $\operatorname{rg}\left(A^T\right) = \operatorname{rg}(A)$.

Conséquences : (calcul du rang d'une matrice = pivot sur les lignes ou les colonnes)

▶ Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes conservent le rang.

▶ Si une matrice est composée de r colonnes échelonnées et de colonnes nulles, alors son rang vaut r, c'est-à-dire le nombre de pivots.

▶ Le rang des lignes d'une matrice est égal au rang de ses colonnes.

II Coordonnées et matrices de passage

Dans cette partie, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension **finie** n.

Définition 3 (*Représentation en colonne(s) d'un (ou de) vecteur(s)*)

Pour $\mathcal{B}$ une base de E fixée avec $\dim(E) = n$, on note, pour tout $v \in E$,
$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$
où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les coordonnées du vecteur v dans $\mathcal{B}$.
Pour $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de E, on note $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la i-ième colonne est $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v_i)$, pour chaque $i \in [\![1,p]\!]$.

EXO 1 : soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Donner la représentation de $P = 6X^2 + X + 3$ dans les bases $(1, X, X^2)$ et $(X^2, 1+X, 1+X^2)$.

Propriété 4

L'application $v \mapsto \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est un isomorphisme de E dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Conséquences : si u, v, w sont des vecteurs de E :

- ▶ u et v sont colinéaires si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} v$ le sont,
- ▶ $u \in \operatorname{Vect}_{\mathbb{K}}(v, w)$ si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u \in \operatorname{Vect}_{\mathbb{K}}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} v, \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} w)$,
- ▶ en notant $M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_p)$, on a $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(v_1, \ldots, v_p)$.

Définition 5 (*Matrice de passage*)

Pour $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ deux bases de E, on note
$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$
C'est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$.

Propriété 6

- Pour $v \in E$, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)$
- $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

EXO 2 : Calculer la matrice de passage d'une base à l'autre de l'EXO 1 et vérifier la cohérence des coordonnées de P obtenues.

III Représentation matricielle dans des bases d'une application linéaire

Ici, E et F sont des $\mathbb{K}$-ev de dimensions **finies**, avec $p = \dim E$ et $n = \dim F$.

Définition 7 (*Matrice d'une application linéaire dans des bases*)

Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F, on appelle *matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$* la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}\big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\big) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

EXO 3 : déterminer la matrice de l'application $D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$, en munissant $\mathbb{R}_2[X]$ de la base $(X^2, 1+X, 1+X^2)$ et $\mathbb{R}_1[X]$ de la base canonique.

Propriété 8

L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) \end{array}$ est un isomorphisme.

En particulier, $\dim\big(\mathcal{L}(E,F)\big) = np = \dim(E)\dim(F)$.

Propriété 9 (*Rang d'une application = rang de sa matrice*)

En notant $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$, on a $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M)$.

Propriété 10 (*Image et composition avec les matrices*)

Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$, en notant $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases de E et F, on a :

$$\forall u \in E, \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}\big(f(u)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u).$$

Et pour $g \in \mathcal{L}(F,G)$, en notant $\mathcal{B}_G$ une base de G, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$$

Remarque : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$.

Propriété 11 (*Changement de bases*)

Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$, en notant $(\mathcal{B}_E, \tilde{\mathcal{B}}_E)$ et $(\mathcal{B}_F, \tilde{\mathcal{B}}_F)$ des couples de bases de E et F, on a la relation

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) = P_{\mathcal{B}_F,\tilde{\mathcal{B}}_F}\,\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}_F,\tilde{\mathcal{B}}_E}(f) P_{\tilde{\mathcal{B}}_E,\mathcal{B}_E}.$$

EXO 4 : écrire l'application de l'EXO 3 dans les bases canoniques.

IV Cas des endomorphismes $(E = F)$

Notation : pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

Propriété 12

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ sa matrice dans une base quelconque, on a

$$f \text{ est bijective } \Leftrightarrow M \text{ est inversible } \Leftrightarrow \mathrm{rg}(M) = \dim(E).$$

Et dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = M^{-1}$.

EXO 5 : écrire la représentation matricielle de l'application linéaire $P \mapsto P(X+2)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Cette application est-elle bijective ?

Rappel. Si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on note $P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k$, où $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Propriété 13

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sa matrice dans une base $\mathcal{B}$, on a pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(P(f)\big) = P(M).$$

Conséquence : si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est sa matrice dans une base quelconque, $P \in \mathbb{K}[X]$ est un *polynôme annulateur* de f (c'est-à-dire $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$) si et seulement si c'est un *polynôme annulateur* de M (c'est-à-dire $P(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$).

Propriété 14 (*Changement de bases*)

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, en notant $(\mathcal{B}_E, \tilde{\mathcal{B}}_E)$ un couple de bases de E, on a la relation

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f) = P_{\mathcal{B}_E,\tilde{\mathcal{B}}_E}\,\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}_E}(f) P_{\tilde{\mathcal{B}}_E,\mathcal{B}_E} = (P_{\tilde{\mathcal{B}}_E,\mathcal{B}_E})^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathcal{B}}_E}(f) P_{\tilde{\mathcal{B}}_E,\mathcal{B}_E}.$$

Définition 15 (*Matrices semblables*)

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables dans* $\mathbb{K}$ s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = P^{-1}BP$.
Cela signifie qu'elles représentent le même endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans des bases a priori différentes.

EXO 6 : montrer que l'application linéaire ϕ_A représentée par $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique est un projecteur, et trouver une base dans laquelle la matrice représentant ϕ_A est la plus simple possible. Généraliser à un projecteur quelconque en dimension finie.