I Déterminant d'une matrice carrée

I.1 Définition

Préambule géométrique

- Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ et (u, v) le couple de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont la représentation matricielle dans la base canonique est M. Le *déterminant* de M est l'aire algébrique du parallélogramme dirigé par u et v dans le plan $\mathbb{R}^2$. On a ainsi :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

- Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$ et (u, v, w) le triplet de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont la représentation matricielle dans la base canonique est M. Le *déterminant* de M est le volume algébrique du parallélépipède dirigé par u, v et w dans l'espace $\mathbb{R}^3$.
- En dimension 2, $\det M = 0$ si et seulement si les vecteurs u et v sont colinéaires. En dimension 3, $\det M = 0$ si et seulement si la famille (u, v, w) est liée.
- Dans les deux cas, l'application det est linéaire et antisymétrique par rapport aux colonnes de M, et $\det(I_2) = \det(I_3) = 1$.

Définition 1 (*Déterminant*)

On admet qu'il existe une unique application $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ qui vérifie :

1. det est linéaire par rapport aux colonnes : pour toutes colonnes $C_1, \dots, C_n, D_k \in \mathbb{K}^n$, avec $k \in [\![1, n]\!]$, et tout $\lambda \in \mathbb{K}$:
$$\begin{aligned} &\det(C_1 \cdots C_k + \lambda D_k \cdots C_n) \\ &= \det(C_1 \cdots C_k \cdots C_n) + \lambda \det(C_1 \cdots D_k \cdots C_n), \end{aligned}$$
2. det est antisymétrique par rapport aux colonnes : $\forall i \neq j \in [\![1, n]\!]^2$,
$$\det(C_1 \cdots C_i \cdots C_j \cdots C_n) = -\det(C_1 \cdots C_j \cdots C_i \cdots C_n),$$
3. $\det(I_n) = 1$.

Remarques : Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

- si deux colonnes de M sont égales, alors $\det M = 0$,
- si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda M) = \lambda^n \det(M)$.

⚠ det n'est pas linéaire : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A + B) = ??$

I.2 Opérations élémentaires et propriétés essentielles

Propriété 2 (*Comportement sous les transformations élémentaires*)

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\forall i \neq j \in [\![1, n]\!]^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \begin{aligned} &\det(MT_{ij}(\lambda)) = \det M, && \text{(transvection)} \\ &\det(MD_i(\lambda)) = \lambda \det M, && \text{(dilatation)} \\ &\det(MP_{ij}) = -\det M. && \text{(permutation)} \end{aligned}$$

D'où, d'après l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan :

Propriété 3

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

- $\forall N \in M_n(\mathbb{K}),\ \det(MN) = \det M \cdot \det N$.
- $\boxed{M \in GL_n(\mathbb{K}) \iff \det M \neq 0,}$ et dans ce cas, $\det(M^{-1}) = \dfrac{1}{\det M}$.
- $\det(M^T) = \det M$.

Conséquence primordiale : deux matrices semblables ont même déterminant.

I.3 Calculs de déterminants en pratique

Notation : pour $M \in M_n(\mathbb{K})$, on note usuellement $\det(M) = |M|$.

★ **En dimension 2 et 3**

Pour $n = 2$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Pour $n = 3$, il y a la *règle de Sarrus* : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - gec - hfa - idb.$
(diagonales - antédiagonales)

★ **Matrices triangulaires (s'y ramener avec des opération élémentaires)**

Propriété 4

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure (ou inférieure), alors $\det A = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Lemme : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, alors $\det A = \det B$.

★ **Par développement par rapport à une ligne ou une colonne**

Définition 5

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ la sous-matrice de A obtenue en ôtant la ligne i et la colonne j de A.

Propriété 6 (*Formules de développement du déterminant*)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Soient k et l dans $[\![1,n]\!]$.

1. Le développement du déterminant de A par rapport à la ligne k s'écrit :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj}).$$

2. Le développement du déterminant de A par rapport à la colonne l s'écrit :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{il} \det(A_{il}).$$

I.4 Résolution de systèmes linéaires

Notations. Soit $AX = B$ un système linéaire de taille n, que l'on suppose de Cramer. Notons $A = (C_1 \cdots C_n)$ les colonnes de A, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ les inconnues du système et pour tout j dans $[\![1,n]\!]$, $A_j = (C_1 \cdots C_{j-1}\ B\ C_{j+1} \cdots C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 7 (*Formules de Cramer*)

Avec ces notations, les solutions du système $AX = B$ sont données par :

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad x_j = \frac{\det A_j}{\det A}.$$

II Déterminant d'un endomorphisme

Définition 8

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension finie.
On appelle *déterminant de l'endomorphisme* $f \in \mathcal{L}(E)$, et on note $\det f$, le déterminant de la représentation matricielle de f dans une base $\mathcal{B}$ de E.

$$\det f = \det\left(Mat_{\mathcal{B}}(f)\right).$$

⚠ Le déterminant ne dépend pas de la base considérée.

Remarque. On a encore $\det(Id_E) = 1$ et $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$ si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Propriété 9

Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors

- $\forall g \in \mathcal{L}(E),\ \det(f \circ g) = \det f \cdot \det g$.
- $\boxed{f \in GL(E) \iff \det f \neq 0,}$ et dans ce cas, $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det f}$.

III Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 10

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}$ une base de E et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. On définit le *déterminant* de la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ par :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \det\left(Mat_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n)\right).$$

Remarque. On a $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ et $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}$ vérifie des propriétés analogues au déterminant matriciel (linéaire par rapport à chaque variable, alternée).

Propriété 11

$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) \neq 0 \iff (u_1, \ldots, u_n)$ famille libre $\iff (u_1, \ldots, u_n)$ base de E.

Propriété 12

Si $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$ sont deux bases de E, $\det_{\mathcal{B}}$ et $\det_{\tilde{\mathcal{B}}}$ sont multiples l'une de l'autre :

$$\det_{\mathcal{B}} = \underbrace{\det P_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}}_{\neq 0} \det_{\tilde{\mathcal{B}}}.$$