I Espaces euclidiens, espaces préhilbertiens

I.1 Définitions.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 1

On dit que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un *produit scalaire* sur E si c'est une *forme bilinéaire symétrique définie positive*, c'est-à-dire :

- *forme :* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$.
- *bilinéaire :* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche et à droite, autrement dit pour tout $(u^\star,v^\star)\in E^2$ fixé, $u\mapsto\langle u,v^\star\rangle$ et $v\mapsto\langle u^\star,v\rangle$ sont linéaires sur E.
- *symétrique :* pour tout $(u,v)\in E^2$, $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$.
- *définie positive :* pour tout $u\in E$, $\langle u,u\rangle\geq 0$,
  et $\big(\langle u,u\rangle=0\Rightarrow u=0_E\big)$.

  On dit alors que $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un *espace préhilbertien*. Si de plus E est de dimension finie, on dit que $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un *espace euclidien*.

Notations : le produit scalaire est parfois noté $\langle u,v\rangle=u\cdot v=(u|v)=\langle u|v\rangle$...
Vocabulaire : si $\langle u,v\rangle=0$, on dit que u et v sont des *vecteurs orthogonaux*, et on note cela $u\perp v$. Par bilinéarité, $0_E\perp u$ pour tout $u\in E$.

Définition 2

Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire, on appelle *norme euclidienne associée à* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ la fonction $N:\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+\\ u & \longmapsto & \sqrt{\langle u,u\rangle}\end{array}\right.$. On note souvent $N=\|\cdot\|$.

EXO 1 : si x et y sont des vecteurs de même norme, montrer que $x+y\perp x-y$.

I.2 Exemples de produits scalaires

- sur $\mathbb{R}^2$: soient $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$
  - ◇ le produit scalaire canonique est $\langle X,Y\rangle=x_1x_2+y_1y_2$, de norme euclidienne associée $\|X\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$,
  - ◇ un autre produit scalaire : $\langle X,Y\rangle=3x_1x_2+y_1y_2$, de norme euclidienne associée $\|X\|=\sqrt{3x_1^2+x_2^2}$,
  - ◇ un autre produit scalaire : $\langle X,Y\rangle=2x_1x_2-x_1y_2-x_2y_1+2y_1y_2$, de norme euclidienne associée $\|X\|=\sqrt{2x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2}$.
- sur $\mathbb{R}^n$: si $X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$, on définit le produit scalaire canonique
$$\langle X,Y\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i=\begin{pmatrix}x_1&\cdots&x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=X^TY,$$
  de norme euclidienne associée $\|X\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.
- sur $E=C^0([0,1],\mathbb{R})$:
  - ◇ si $(f,g)\in E^2$, on définit le produit scalaire usuel $\langle f,g\rangle=\int_0^1 fg$, de norme euclidienne associée $\|f\|=\sqrt{\int_0^1 f^2}$.
  - ◇ si $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}_+^\star$ est continue, on peut définir sur E le produit scalaire $\langle f,g\rangle_\varphi=\int_0^1 fg\varphi$, de norme euclidienne associée $\|f\|_\varphi=\sqrt{\int_0^1 f^2\varphi}$.
- sur $\mathbb{R}[X]$, on peut considérer des produits scalaires provenant de la structure algébrique ou des espaces de fonctions :
  - ◇ si $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]$, $\langle P,Q\rangle=\int_0^1 P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire de norme euclidienne associée $\|P\|=\sqrt{\int_0^1 P(t)^2dt}$.
  - ◇ si $P=\sum a_kX^k$ et $Q=\sum b_kX^k$ sont des polynômes, $\langle P,Q\rangle=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kb_k$ (somme finie) définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, de norme euclidienne associée $\|P\|=\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty}a_k^2}$.

EXO 2 : montrer que $P=1$ et $Q=\frac{1}{2}-X$ sont orthogonaux pour le premier produit scalaire, mais pas pour le second.
⚠ *La notion d'orthogonalité dépend du choix de produit scalaire.*

- sur $\mathbb{R}_n[X]$: si $(a_0,\dots,a_n)$ sont des réels distincts deux à deux, on peut définir le produit scalaire $\langle P,Q\rangle=\sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$, de norme euclidienne associée $\|P\|=\sqrt{\sum_{k=0}^n P(a_k)^2}$.

EXO 3 : • Montrer que $\langle P,Q\rangle=P(0)Q(0)+\int_0^1 P'(t)Q'(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et donner la norme euclidienne associée.
• Vérifier que la covariance définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel des variables aléatoires à valeurs réelles définies sur un même univers fini.

I.3 Propriétés et inégalités essentielles

Dans toute la suite, on se place dans un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$.

⚠ le produit scalaire n'est **pas** linéaire : si $(u,v) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda u, \lambda v\rangle = \lambda^2 \langle u, v\rangle$.

Propriété 3 (*Identité remarquable*)

Pour tout $(u,v) \in E^2$, $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$.

Conséquences : • si $u \perp v$, alors $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ (Pythagore !)

• La norme euclidienne définit entièrement le produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right).$$

Théorème 4 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

Pour tout $(u,v) \in E^2$,

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

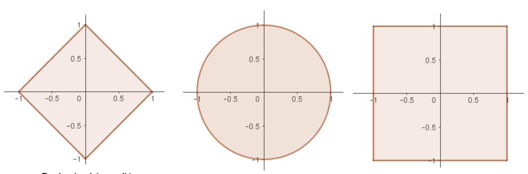
EXO 4 : montrer que si $x_1, \ldots, x_n$ sont dans $\mathbb{R}_+^\star$, $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

Propriété 5 (*de la norme*)

Une norme euclidienne vérifie les propriétés suivantes :

- *positivité :* pour tout $u \in E$, $\|u\| \geq 0$,
- *séparation :* pour tout $u \in E$, $\|u\| = 0 \iff u = 0_E$,
- *absolue homogénéité :* pour tout $u \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$,
- *inégalité triangulaire :* pour tout $(u,v) \in E^2$, $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$, avec égalité si et seulement si u et v sont colinéaires de même sens.

Remarque : on appelle *norme* toute fonction de E dans $\mathbb{R}$ qui vérifie ces axiomes. Certaines ne sont pas euclidiennes : par exemple sur $\mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$ ou $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$.



Boule et sphère unité pour la norme $\|\cdot\|_1$ — Boule et sphère unité pour la norme $\|\cdot\|_2$ — Boule et sphère unité pour la norme $\|\cdot\|_\infty$

II Orthogonalité

II.1 Familles orthogonales, familles orthonormées

Définition 6

On dit qu'une famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est *orthogonale* si pour tout $i \neq j$, $v_i \perp v_j$.
Si de plus $\|v_i\| = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on dit que la famille est *orthonormée*.

Remarques : • si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille orthonormée, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$ (symbole de Krönecker).

• si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une famille orthogonale, le théorème de Pythagore se généralise :

$$\|v_1 + \cdots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2.$$

• Les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}_n[X]$ sont orthonormées, respectivement pour le produit scalaire canonique et pour le produit scalaire usuel $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^n a_k b_k$.

Propriété 7

Toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.

II.2 Calculs dans une base orthonormée

Soit E un espace euclidien, muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \cdots e_n)$.

Propriété 8 (*Coordonnées dans une base orthonormée*)

Soit $x \in E$. Alors $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$. Autrement dit $Mat_{\mathcal{B}}(x) = (\langle x, e_i\rangle)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

Propriété 9 (*Produit scalaire et norme dans une base orthonormée*)

Soit $(x,y) \in E^2$. Alors $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle \langle y, e_i\rangle$ et $\|x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle^2}$.

Moralité : si $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ sont les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$, $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i$ et $\|x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Avec les coordonnées dans une base orthonormée, le produit scalaire et la norme s'écrivent comme le produit scalaire canonique et sa norme euclidienne.

II.3 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, existence de bases orthonormées

On suppose à nouveau $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ préhilbertien.

Théorème 10 (*Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*)

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille libre de E. Alors il existe une unique famille orthonormée $(\hat{u}_1, \dots \hat{u}_n)$ vérifiant pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

- $\langle u_k, \hat{u}_k \rangle > 0$,
- $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}(\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_k)$.

On construit cette famille par l'algorithme d'*orthogonalisation* récursif suivant, donnant une famille orthogonale $(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$:

- on pose $\tilde{u}_1 = u_1$,
- pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\tilde{u}_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \tilde{u}_i, u_{k+1} \rangle}{\|\tilde{u}_i\|^2} \tilde{u}_i$,

puis pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on définit $\hat{u}_k = \frac{\tilde{u}_k}{\|\tilde{u}_k\|}$ (*normalisation*).

Alternative : on peut normaliser au fur et à mesure, pour le même résultat final.

Propriété 11 (*Existence de bases orthonormées*)

Tout espace euclidien admet des bases orthonormées.
De plus, la matrice de passage d'une base à la base obtenue en l'orthonormalisant avec le procédé de Gram-Schmidt est une matrice triangulaire supérieure.

EXO 5 : déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$.

II.4 Orthogonalité et linéarité

Définition 12 (*Orthogonalité*)

Soient $(x, y) \in E^2$, $A, B \subset E$.

- on dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note cela $x \perp y$.
- on dit que x est orthogonal à A si $\forall a \in A$, $\langle x, a \rangle = 0$. On note cela $x \perp A$.
- on dit que A et B sont orthogonales si $\forall a \in A, \forall b \in B$, $\langle a, b \rangle = 0$.
  On note cela $A \perp B$.

Propriété 13 (*Somme directe orthogonale*)

Si des sous-espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux, alors ils sont en somme directe : $F \perp G \Longrightarrow F \oplus G$. On peut noter cela $F \overset{\perp}{\oplus} G$.

Définition 14

- si $x \in E$, on appelle *orthogonal de* x et on note $\{x\}^\perp$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à x : $\{x\}^\perp = \{y \in E | \langle x, y \rangle = 0\}$.
- si $A \in E$, on appelle *orthogonal de* A et on note $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à A : $A^\perp = \{y \in E | \forall a \in A, \langle a, y \rangle = 0\}$.

Propriété 15

- Soient A et B des parties de E. Alors $A \perp B \iff B \subset A^\perp \iff A \subset B^\perp$.
- Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.
- Si $A \subset E$, $A^\perp$ est un sev de E orthogonal à A, donc $A \subset (A^\perp)^\perp$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.
- Si $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, $F^\perp = \{e_1, \dots, e_p\}^\perp$.

II.5 Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

Dans un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$, soit F un sev muni d'une bon $(e_1, \dots, e_p)$.

Définition 16 (*Projection orthogonale sur un sev de dim finie*)

Si $v \in E$, on appelle *projeté orthogonal de* v *sur* F le vecteur

$$p_F(v) = \sum_{i=1}^{p} \langle v, e_i \rangle e_i.$$

C'est l'unique vecteur de F tel que $v - p_F(v) \in F^\perp$.

Propriété 17

L'endomorphisme $p_F : E \to E$ est un projecteur d'image F et de noyau $F^\perp$.

Conséquences : • On appelle $F^\perp$ **le** supplémentaire orthogonal de F : $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$.
• Si E est de dimension finie, $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ et $(F^\perp)^\perp = F$.
• Théorème de la base orthonormée incomplète.

Définition 18 (*Distance d'un point à une partie*)

Si $v \in E$ et $A \subset E$, $d(v, A) = \inf\{\|v - a\|, a \in A\}$ est la *distance de* x *à* A.

Théorème 19 (*Projeté = unique minimiseur de la distance à F*)

Si $(v, p) \in E^2$, alors : $\quad d(v, F) = \|v - p\| \quad \iff \quad p = p_F(v)$.

EXO 6 : déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 dt$.