I Topologie de $\mathbb{R}^2$

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne canonique $\|\cdot\|$.
On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}^2$ si $\|x_n - \ell\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Définition 1 (*Boules ouvertes, boules fermées, sphères*)

Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r \geq 0$.

- $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-a\| < r\}$ est la *boule ouverte* de centre a et de rayon r.
- $\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-a\| \leq r\}$ est la *boule fermée* de centre a et de rayon r.
- $S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-a\| = r\}$ est la *sphère* de centre a et de rayon r.

Remarque : $B(a,0) = \emptyset$ et $\overline{B}(a,0) = S(a,0) = \{a\}$.

Définition 2 (*Ouvert, fermé*)

- On dit que $U \subset E$ est un *ouvert* de $\mathbb{R}^2$ si pour tout $a \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$.
- On dit que $F \subset E$ est un *fermé* de $\mathbb{R}^2$ si ${}^cF$ est un ouvert de E.

⚠ fermé $\neq$ non ouvert

EXO 1 : montrer que $\overline{B}(0,1) \setminus \{0\}$ n'est ni ouvert, ni fermé.

Remarque culturelle : $\mathbb{R}^2$ et $\emptyset$ sont les deux seules parties de $\mathbb{R}^2$ qui sont à la fois ouvertes et fermées. On dit que $\mathbb{R}^2$ est *connexe.*

Propriété 3 (*Caractérisation séquentielle des fermés*)

Une partie F de E est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F.

Définition 4 (*Adhérence, intérieur, frontière*)

Soit $A \subset E$. On définit

- l'*adhérence* de A, notée $\overline{A}$, comme le plus petit fermé contenant A,
- l'*intérieur* de A, noté $\mathring{A}$, le plus grand ouvert contenu dans A.
- la *frontière* (ou *bord*) de A, notée ∂A, comme $\overline{A} \setminus \mathring{A}$.

On dit que $a \in E$ est *adhérent* (resp. *intérieur*) à A si $a \in \overline{A}$ (resp. $a \in \mathring{A}$).

EXO 2 : montrer que $\overline{A}$ est l'ensemble des limites des suites convergentes de A.
Montrer que a est adhérent à A si et seulement si $d(a,A) = 0$.
Montrer que $a \in \partial A$ si et seulement si $d(a,A) = d(a,{}^cA) = 0$.

Définition 5 (*Borné*)

On dit qu'une partie $A \subset E$ est *bornée* s'il existe $M > 0$ tel que $A \subset \overline{B}(0,M)$.
Autrement dit, il existe $M > 0$ tel que pour tout $a \in A$, $\|a\| \leq M$.

EXO 3 : montrer que si A est bornée, alors $\overline{A}$ est bornée.

II Fonctions de deux variables

II.1 Définitions et représentations

Définition 6

On appelle *fonction de deux variables* une fonction du type :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}.$$

Les *applications partielles* associées à f en $a = (x_0, y_0)$ sont les applications :

$$f_{1,a} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x,y_0) \end{array} \quad \text{et} \quad f_{2,a} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f(x_0,y) \end{array}.$$

Exemples : $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$, $\quad g : (x,y) \mapsto x$, $\quad h : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$.

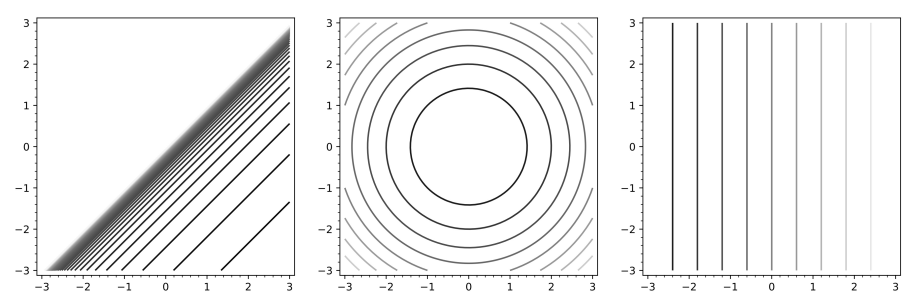
Représentation des fonctions de deux variables :
Le graphe de f est une surface dans $\mathbb{R}^3$:

$$\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}.$$

Si $c \in \mathbb{R}$, la *courbe de niveau* de f de valeur c peut être visualisée dans $\mathbb{R}^2$:

$$f^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}.$$

EXO 4 : Quelles sont les courbes de niveaux des fonctions f, g et h ?



II.2 Continuité

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $a \in D$.

Définition 7 (*Limite*)

Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en a, et on note $f(u) \underset{u \to a}{\longrightarrow} \ell$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall u \in D \cap \overline{B}(a, \delta), \quad |f(u) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Exo 5 : décrire de manière analogue le cas de $\ell = \pm\infty$, en s'appuyant sur la définition pour une fonction d'une variable.

Définition 8 (*Continuité*)

On dit que f est *continue en a* si $f(u) \underset{u \to a}{\longrightarrow} f(a)$.
On dit que f est *continue sur D* si f est continue en d pour tout $d \in D$.

Propriété 9 (*Caractérisation séquentielle de la continuité*)

La fonction f est continue en a si et seulement si pour toute suite (x_n) de D qui converge vers a, $f(x_n)$ converge vers $f(a)$.

Propriété 10

Si f et g sont continues, alors $f+g$, λf, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$ sont continues lorsqu'elles sont définies.
Les fonctions construites à partir des fonctions usuelles (en particulier tous les polynômes de deux variables) sont continues sur leur domaine de définition.

Propriété 11

Si f est continue en $a = (x_0, y_0) \in U$, alors $f_{1,a}$ et $f_{2,a}$ sont continues en x_0 et y_0 respectivement.

⚠ La réciproque est fausse !

Exo 6 : étudier la continuité de $f : (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ en $(0, 0)$.

II.3 Dérivabilité

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$, et $a = (x_0, y_0) \in U$.

Définition 12 (*Dérivée directionnelle*)

Soit $v \in \mathbb{R}^2$. La *dérivée de f en a selon le vecteur v*, notée $\partial_v f(a)$ est la dérivée en 0 de la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ (si elle existe).

Définition 13 (*Dérivées partielles, gradient*)

Si $f_{1,a}$ est dérivable en x_0, on appelle *première dérivée partielle de f en a* ou *dérivée partielle de f par rapport à x en a* le nombre dérivé $f'_{1,a}(x_0)$, et on note :

$$\partial_1 f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = f'_{1,a}(x_0).$$

De même, on appelle *seconde dérivée partielle de f en a* ou *dérivée partielle de f par rapport à y en a* le nombre dérivé $f'_{2,a}(y_0)$ (s'il existe), et on note :

$$\partial_2 f(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = f'_{2,a}(y_0).$$

On appelle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ les *fonctions dérivées partielles* de f.
On note alors $\nabla f(a) := \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a), \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\right) \in \mathbb{R}^2$ le *gradient de f en a*.

Exo 7 : Gradients des fonctions $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ et $g : (x, y) \mapsto \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Exo 8 : Déterminer les dérivées directionnelles en $(0, 0)$ de la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 \text{ si } 0 < y < x^2, \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$$

Est-elle continue en $(0, 0)$?

Définition 14 (*Classe C^1*)

On dit que f est *de classe C^1 sur U*, et on note $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur U.

En pratique, les fonctions usuelles sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème 15 (*Développement limité à l'ordre 1*)

Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ et $a = (x_0, y_0) \in U$. On a pour tout $u = (x, y) \in U$:

$$\begin{aligned} f(u) &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - y_0) + \underset{u \to a}{o}(\|u - a\|) \\ &= f(a) + \langle \nabla f(a), u - a \rangle + \underset{u \to a}{o}(\|u - a\|). \end{aligned}$$

Interprétation graphique : $z - z_0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)(y - y_0)$ est l'équation cartésienne du plan tangent au graphe de f en $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$.

Conséquence : le gradient de f en (x_0, y_0) définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.

II.4 Dériver des composées

EXO 9 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.
Dériver les fonctions $u(x) = f(x, -x)$ et $g(x, y) = f(y, x)$.

Propriété 16 (*Dériver une valeur le long d'un chemin*)

Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ et $x, y \in C^1(I, \mathbb{R})$ telles que $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ vérifie $\gamma(I) \subset U$. Alors $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et :

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad (f \circ \gamma)'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot y'(t) \\ &= \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle. \end{aligned}$$

Conséquence graphique : le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f.

Propriété 17

Soit $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ et $\phi \in C^1(I, \mathbb{R})$ telles que $f(U) \subset I$. Alors $\phi \circ f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et $\forall a \in U$:

$$\nabla(\phi \circ f)(a) = \left(\phi'(f(a)) \frac{\partial f}{\partial x}(a), \phi'(f(a)) \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right) = \phi'(f(a)) \nabla f(a).$$

EXO 10 : retrouver les résultats de l'EXO 7 avec cette formule.

Propriété 18

Soient $f, \varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Alors $F = f \circ (\varphi, \psi) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et :

$$\forall a \in U, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \partial_1 F(a) &=& \partial_1 f(\varphi(a), \psi(a)) \cdot \partial_1 \varphi(a) + \partial_2 f(\varphi(a), \psi(a)) \cdot \partial_1 \psi(a), \\ \partial_2 F(a) &=& \partial_1 f(\varphi(a), \psi(a)) \cdot \partial_2 \varphi(a) + \partial_2 f(\varphi(a), \psi(a)) \cdot \partial_2 \psi(a), \end{array} \right.$$

c'est-à-dire :

$$\forall a \in U, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \partial_1 F(a) &=& \langle \nabla f(\varphi(a), \psi(a)), \partial_1(\varphi, \psi)(a) \rangle, \\ \partial_2 F(a) &=& \langle \nabla f(\varphi(a), \psi(a)), \partial_2(\varphi, \psi)(a) \rangle. \end{array} \right.$$

EXO 11 : soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.
Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f, et réciproquement.

III Optimisation des fonctions de deux variables

Définition 19 (*Minimum global, local, strict*)

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $a \in D$.
On dit que f admet un *minimum global* en a si pour tout $x \in D$, $f(x) \geq f(a)$.
On dit que ce minimum est *strict* si pour tout $x \in D \setminus \{a\}$, $f(x) > f(a)$.
On dit que f admet un minimum *local* en a si il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in D \cap \overline{B}(a, r)$, $f(x) \geq f(a)$.

EXO 12 : déterminer le minimum global de la fonction $f(x, y) = (x-6)^2 + (y+3)^2 - 8$.
Est-il strict ? est-ce que f est majorée ? atteint d'autres extrema locaux ?

Propriété 20 (*Existence d'extrema globaux*)

Si $A \subset \mathbb{R}^2$ est fermé et borné, et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes sur A.

EXO 13 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue et *coercive*, c'est-à-dire qui vérifie $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global.

Définition 21 (*Point critique*)

Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, on dit que $a \in D$ est un *point critique* de f

$$\text{si} \qquad \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) = (0, 0).$$

EXO 14 : déterminer les points critiques de la fonction $f : (x, y) \mapsto \cos(x) \sin(y)$.

Propriété 22 (*Condition nécessaire d'optimalité*)

Si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et atteint un extremum local en $a \in \mathring{D}$, alors a est un point critique de f.

⚠ ça n'est pas une condition suffisante !

EXO 15 : calculer le gradient de $f(x, y) = x^3 + y^2$ en $(0, 0)$. Est-ce que f atteint un extremum local en $(0, 0)$?

EXO 16 : soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, 2] \times [-1, 0] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 - 2x + xy + y^2. \end{array} \right.$
Déterminer les extrema globaux de f.

EXO 17 : déterminer les extrema de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ sur $D = \overline{B}((0, 0), 2)$.