I Définitions et manipulations de sommes

On note $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels ou complexes.

Définition 1 (*Notation des sommes et produits*)

Pour tout m et n des entiers naturels tels que $m \leqslant n$, on note

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \times \cdots \times a_n\,.$$

Les nombres $a_m, \ldots, a_n$ sont les *termes* de la somme, k l'*indice* de sommation, et m et n les *bornes* de la somme. Par convention, si $n < m$,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = 1\,.$$

Plus généralement, si $(a_i)_{i\in I}$ est indexée par un ensemble fini I, on note la somme de ces éléments $\sum_{i\in I} a_i$, avec la convention $\sum_{i\in\emptyset} a_i = 0$.

Propriété 2 (*Linéarité de la somme*)

Pour tout réel ou complexe λ et pour tout m et n entiers naturels,

$$\sum_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k\,.$$

De plus, pour tout entier p tel que $m \leqslant p \leqslant n$, on a la *relation de Chasles* :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k\,.$$

Propriété 3 (*Somme et inégalités*)

Dans le cas de sommes à coefficients réels, on a :

- si pour tout $k \in [\![m,n]\!]$, $a_k \leqslant b_k$ alors $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=m}^{n} b_k$.
- inégalité triangulaire : $\displaystyle\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |a_k|\,.$

Propriété 4 (*Changement d'indice de type glissement / retournement*)

Pour tout m, n et p entiers naturels on a

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m+p}^{n+p} a_{i-p} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=p-n}^{p-m} a_{p-i}\,.$$

Changement d'indice : $i = k + p$ Changement d'indice : $i = p - k$
(i est le nouvel indice, k l'ancien indice, et p un nombre entier <u>ne dépendant pas</u> des indices de sommation)

EXO 1 : montrer que si $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$ En déduire $\displaystyle\sum_{k=3}^{10} (2k+3)$.

Propriété 5 (*Somme télescopique*)

Pour tout $m \leq n$ entiers naturels, on a $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m$.

EXO 2 : pour $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

EXO 3 : développer $(k+1)^3 - k^3$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$. De même avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Propriété 6 (*Somme géométrique*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

EXO 4 : calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{10} \frac{3^k + 2}{2^{k-1}}$.

EXO 5 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.

Propriété 7 (*Séparation des termes de rangs pairs et impairs*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{2n} a_k = \sum_{i=0}^{n} a_{2i} + \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j+1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{2n+1} a_k = \sum_{i=0}^{n} a_{2i} + \sum_{j=0}^{n} a_{2j+1}.$$

Cette technique se généralise si on dispose d'une *partition* de l'ensemble des indices.

II Binôme de Newton

Définition 8 (*Coefficient binomial*)

Pour tout k et n entiers, on définit $\binom{n}{k}$, qui se lit « k parmi n », par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n \quad \text{et} \quad \binom{n}{k} = 0 \text{ sinon.}$$

Pour k et $n \in \mathbb{N}$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de :

- combinaisons (ou parties) à k éléments d'un ensemble à n éléments,
- tirages possibles lors d'un tirage simultané de k éléments parmi n.
- chemins à k « succès » dans un arbre binaire de longueur n.

EXO 6 : Montrer que pour tout k et $n \in \mathbb{N}$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Propriété 9 (*Formule de Pascal*)

Pour tout k et $n \in \mathbb{N}$, les coefficients binomiaux vérifient $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Théorème 10 (*Formule du binôme de Newton*)

Pour a, b des réels et $n \in \mathbb{N}$ on a $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

EXO 7 : montrer que pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $\displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}$.

EXO 8 : pour $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^5(x)$ à l'aide du binôme de Newton.

III Compléments sur les produits

Propriété 11 (ln *et* exp *avec des sommes*)

Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, b_k est strictement positif, alors pour tout entiers m et n :

$$\prod_{k=m}^{n} \exp(a_k) = \exp\left(\sum_{k=m}^{n} a_k\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=m}^{n} \ln(b_k) = \ln\left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right).$$

Propriété 12 (*Opérations élémentaires, Chasles*)

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$, on a

$$\prod_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k \qquad \prod_{k=m}^{n} (a_k \times b_k) = \prod_{k=m}^{n} a_k \times \prod_{k=m}^{n} b_k.$$

De plus, pour $p \in \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$, on a $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m}^{p} a_k \times \prod_{k=p+1}^{n} a_k$.

EXO 9 : pour $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 2^k$, $\displaystyle\prod_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} k$ et $\displaystyle\prod_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n} k$.

Propriété 13 (*Produit télescopique*)

Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k est non nul, alors pour tout entiers $m \leq n$:

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}.$$

IV Sommes doubles

Propriété 14 (*Sommes rectangulaires*)

Soit $p \leq q$ et $r \leq s$ des entiers, et $(a_{i,j})_{(i,j) \in [\![p,q]\!] \times [\![r,s]\!]}$ des nombres complexes. Alors

$$\sum_{i=p}^{q} \sum_{j=r}^{s} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in [\![p,q]\!] \times [\![r,s]\!]} a_{i,j} = \sum_{j=r}^{s} \sum_{i=p}^{q} a_{i,j}.$$

Exemple. Produit de deux sommes : soit $p \leq q$ et $r \leq s$ des entiers, $(a_i)_{i \in [\![p,q]\!]}$ et $(b_j)_{j \in [\![r,s]\!]}$ deux familles de nombres complexes. On a alors

$$\left(\sum_{i=p}^{q} a_i\right)\left(\sum_{j=r}^{s} b_j\right) = \sum_{(i,j) \in [\![p,q]\!] \times [\![r,s]\!]} a_i \, b_j.$$

Propriété 15 (*Sommes « triangulaires »*)

Soit $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ une famille de nombres complexes indexée par l'ensemble fini $\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \mid i \leq j\}$. On a alors

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \\ i \leq j}} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}.$$