Dans tout ce chapitre, on note f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I Généralités sur les fonctions

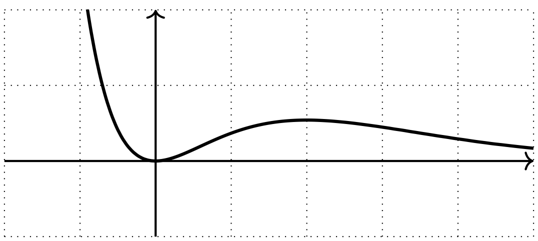
Définition 1 (*Représentation graphique*)

Le *graphe* de f est l'ensemble de points du plan :

$$\operatorname{gr} f = \left\{ \big(x, f(x)\big) \,;\, x \in I \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

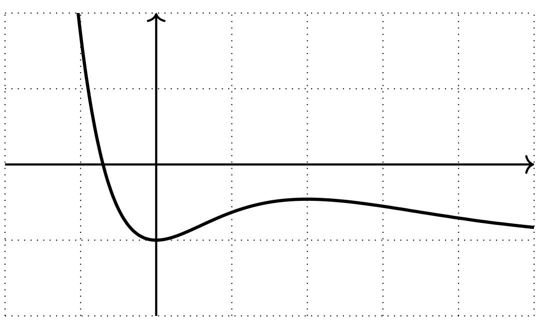
Transformations d'un graphe

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On l'illustre par le graphe suivant :



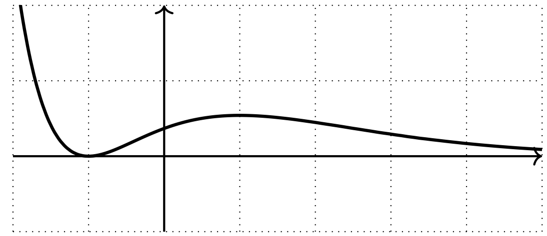
gr f

- *Translation verticale.* Soit $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+a \end{array} \right.$ est l'image de gr f par la translation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y+a \end{pmatrix}$:



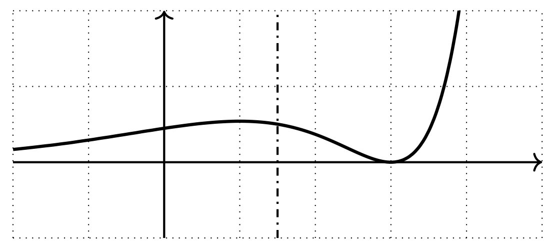
gr g $(a = -1)$

- *Translation horizontale.* Soit $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x+a) \end{array} \right.$ est l'image de gr f par la translation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-a \\ y \end{pmatrix}$.



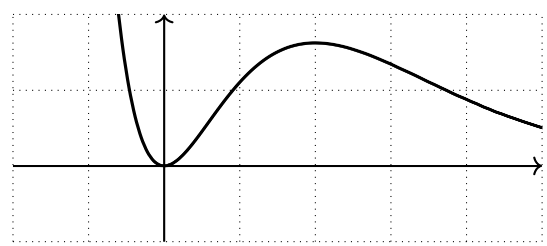
gr g $(a = 1)$

- *Réflexion d'axe vertical.* Soit $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(a-x) \end{array} \right.$ est l'image de gr f par la réflexion $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a-x \\ y \end{pmatrix}$ par rapport à la droite verticale d'équation $x = a/2$.

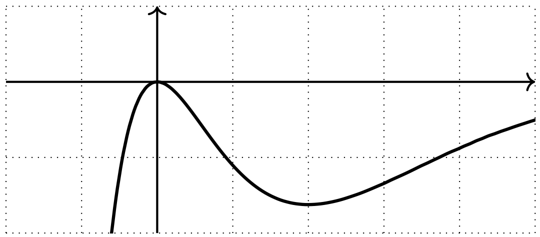


gr g $(a = 3)$

- *Dilatation verticale.* Soit $\lambda \neq 0$. Le graphe de la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array} \right.$ est l'image de gr f par la transformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

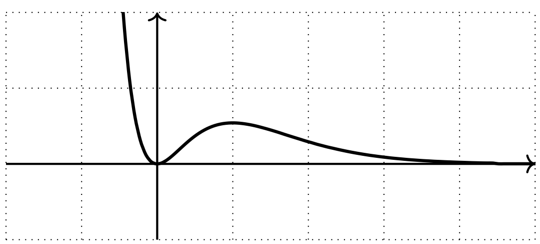


gr g $(\lambda = 3)$

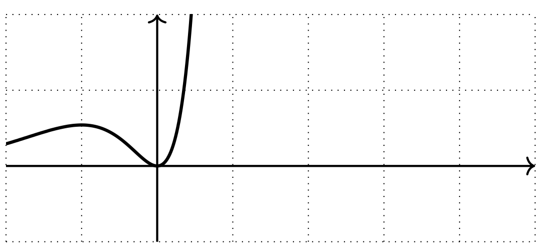


gr g ($\lambda = -3$)

- *Dilatation horizontale.* Soit $\lambda \neq 0$. Le graphe de la fonction $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(\lambda x) \end{array}\right.$ est l'image de gr f par la transformation $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\lambda} \\ y \end{pmatrix}$.



gr g ($\lambda = 2$)



gr g ($\lambda = -2$)

Définition 2 (*Parité, périodicité*)

- on dit que f est *paire* lorsque : $\forall x \in I,\ -x \in I$ et $f(-x) = f(x)$,
- on dit que f est *impaire* lorsque : $\forall x \in I,\ -x \in I$ et $f(-x) = -f(x)$,
- pour $T \in \mathbb{R}_+^*$, on dit que f est T-périodique lorsque :

$$\forall x \in I, \qquad x + T \in I \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x).$$

EXO 1 : étudier la parité de $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$, $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$, de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$.

EXO 2 : montrer que $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.

EXO 3 : déterminer la plus petite période de $x \mapsto \sin(2x) + \cos(3x)$.

Propriété 3 (*Graphe et parité*)

- Si f est paire, son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est impaire, son graphe est symétrique par rapport à l'origine.
- Si f est T-périodique, son graphe est invariant par translation de $(T, 0)$.

Définition 4 (*Fonction majorée, bornée*)

- f est *majorée* sur I : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant M$.
- f est *minorée* sur I : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) \geqslant m$,
- f est *bornée* sur I lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Comme pour les suites, f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée. Cela revient à dire que le graphe de f est contenu dans une certaine bande horizontale du plan.

⚠ Ci-dessus, M est **un** majorant et m **un** minorant de f sur I. Même s'ils existent, ils ne sont **pas** uniques (contrairement au maximum/minimum).

Définition 5 (*Sens de variation*)

- f croissante sur I : $\forall (x,y) \in I^2,\ x \geqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$,
- f strictement croissante sur I : $\forall (x,y) \in I^2,\ x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$,
- f est décroissante sur I : $\forall (x,y) \in I^2,\ x \geqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$,
- f est strictement décroissante sur I : $\forall (x,y) \in I^2,\ x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

EXO 4 : mq f est strictement croissante sur I ssi $\forall (x,y) \in I^2,\ f(x) \geq f(y) \Rightarrow x \geq y$.

II Outils pour l'étude de fonctions

Méthodes et étapes pour l'étude d'une fonction :

Prendre un instant pour observer les propriétés de la fonction : pourrait-elle paire, impaire, périodique ? si oui, restreindre le domaine d'études.

- étude du domaine de définition puis calcul de la dérivée là où c'est possible,
- étude du signe de la dérivée (résolution de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$)
- représentation du tableau de variations (avec limites aux bords du domaine) et éventuellement de l'allure du graphe (avec quelques tangentes).

Définition 6 (*Domaine de définition d'une fonction*)

Pour une fonction f où les images sont définies par opérations sur des fonctions usuelles, le domaine de définition de f est l'ensemble des réels x pour lesquels l'image $f(x)$ est définie.

Propriété 7 (*Signe de la dérivée et sens de variation*)

Pour f une fonction dérivable sur un **intervalle** I :
- si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I,
- si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.

Si de plus f' s'annule un nombre fini de fois, alors f est strictement monotone.

En particulier, pour une fonction dérivable, les points où la fonction est minimale ou maximale sont des points d'annulation de la dérivée.

Propriété 8 (*Équation de la tangente*)

Si f est dérivable en a (point du domaine de définition), alors le graphe de f admet une tangente dont une équation cartésienne est

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

EXO 5 : étude de la fonction $f : x \to \dfrac{4x}{x^2+x+2}$. Allure du graphe, tangentes en $x = 0$ et en $x = 1$ et position par rapport à la droite d'équation $y = x$.

EXO 6 : étude de la fonction $f : x \to \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)}$. Allure du graphe et tangente en en $x = 1$.

Propriété 9 (*Dérivée et opérations*)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors :
- leur **somme** $u + v$ est dérivable sur I, et
$$\forall x \in I, \quad (u + v)'(x) = u'(x) + v'(x).$$
- leur **produit** uv est dérivable sur I, et
$$\forall x \in I, \quad (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$
- si v ne s'annule pas sur I, le **quotient** $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I, et
$$\forall x \in I, \quad \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}.$$
- leur **composée** $u \circ v$ est dérivable sur son domaine de définition D, et
$$\forall x \in D, \quad (u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'\big(v(x)\big).$$

EXO 7 : dériver $x \mapsto \ln(\ln(x))$, de $x \mapsto \ln(x)^3$, de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}(1+x^2)$ si possible.

Propriété 10 (*Convexité*)

Si la fonction f est deux fois dérivable, alors :

$$f \text{ est convexe sur } I \iff f' \text{ est croissante sur } I \iff f'' \geq 0 \text{ sur } I$$
$$\iff \text{son graphe est situé au-dessus de chacune de ses tangentes.}$$

EXO 8 : écrire la propriété analogue pour une fonction concave.

EXO 9 : montrer que $\forall x \geq -1$, $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Dérivation complexe

Si $g : I \to \mathbb{C}$ est une fonction à variable réelle et à valeurs complexes, on dit que g est dérivable sur I si $\mathrm{Re}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont dérivables. On note alors pour tout $x \in I$: $g'(x) = \mathrm{Re}(g)'(x) + i\,\mathrm{Im}(g)'(x)$.

Les règles de la dérivation dans $\mathbb{R}$ s'étendent aux fonctions à valeurs complexes : dériver de la somme, du produit, du quotient...

EXO 10 : dériver l'exponentielle complexe $x \mapsto \exp(ix)$. Si $\phi : I \to \mathbb{C}$ est une fonction dérivable à valeurs complexes, montrer que $(\exp\circ\phi)' = \phi' \exp\circ\phi$.

III Bijectivité des fonctions d'une variable réelle

Propriété 11

Si une fonction est strictement monotone sur I, alors elle est injective sur I.

Théorème 12 (*Théorème des valeurs intermédiaires*)

Si I est un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et f une fonction **continue** sur I, alors pour tout a et $b \in I$, toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ admettent au moins un antécédent par f, compris entre a et b.

Théorème 13 (*Théorème des valeurs intermédiaires bis*)

Si I est un **intervalle** et f est **continue** sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Théorème 14 (*Théorème de la bijection monotone*)

Si f est **continue et strictement monotone** sur un **intervalle** I, alors

- f réalise une bijection de I vers l'intervalle $f(I)$,
- $f(I)$ se détermine à l'aide des images ou limites de f aux bords de I :

variation de f sur I	I	$f(I)$
strict. croiss.	$[a,b]$	$[f(a), f(b)]$
strict. croiss.	$]a,b[$	$]\lim_a f, \lim_b f[$
strict. croiss.	$]a,b]$	$]\lim_a f, f(b)]$
strict. décroiss.	$[a,b]$	$[f(b), f(a)]$
strict. décroiss.	$]a,b]$	$[f(b), \lim_a f[$
...	...	...

Propriété 15 (*Symétrie des graphes de f et f^{-1}*)

Si f est bijective, le graphe de sa bijection réciproque f^{-1} est le symétrique de celui de f par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$).

Propriété 16 (*Dérivée d'une bijection réciproque*)

Si f est bijective et dérivable sur I, avec f' qui ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ avec $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

IV Rappels sur les limites

Propriété 17 (*Opérations sur les limites*)

Lorsqu'une fonction est définie par des sommes/produits/quotients de fonctions dont on peut calculer les limites, on peut dans certains cas en déduire la limite de la fonction à l'aide des résultats résumés dans les tableaux suivants, où f et g sont des fonctions définies sur un intervalle I et a est au bord de I (éventuellement $\pm\infty$) :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} f(x) \times g(x)$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$\ell \ell'$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$
$\pm\infty$	$\mp\infty$	F.I.	$-\infty$
$\ell > 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\ell < 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\mp\infty$
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)}$
$\ell \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{\ell}$
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$
$\pm\infty$	$0^\pm$
0	F.I.

Remarque : F.I. signifie forme indéterminée, c'est-à-dire que la propriété ci-dessus ne permet de conclure **rien** sur l'existence et/ou la valeur de la limite en question. Il faut donc utiliser d'autres méthodes (factorisation, quantité conjuguée, croissances comparées) pour espérer lever la forme indéterminée. Un autre outil est l'identification d'un taux d'accroissement :

Propriété 18 (*Limite du taux d'accroissement*)

Si f est dérivable en $a \in I$, alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\to} f'(a).$$