I Rappels

I.1 Forme algébrique, calcul algébrique

L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est un ensemble tel que :

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et les opérations sur $\mathbb{R}$ (addition, multiplication) s'étendent sur $\mathbb{C}$ avec les mêmes propriétés (commutativité, distributivité),
- il existe un nombre $i \in \mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$,
- pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$.

Les nombres a et b sont uniques et l'on note $\mathrm{Re}(z) = a$ et $\mathrm{Im}(z) = b$.

Vocabulaire. L'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels est la *forme algébrique* de z.

Propriété 1 (*Linéarité de la partie réelle et de la partie imaginaire*)

Pour $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(z_k) \quad \text{et} \quad \mathrm{Re}(\lambda z_1) = \lambda\, \mathrm{Re}(z_1)\ .$$

Comme les opérations usuelles de $\mathbb{R}$ se prolongent dans $\mathbb{R}$, les formules de la somme d'une suite géométrique, de factorisation de $a^n \pm b^n$ et du binôme de Newton sont encore valables dans $\mathbb{C}$.

Définition 2 (*Représentation géométrique de* $\mathbb{C}$)

Pour $z \in \mathbb{C}$, l'image de z dans le plan muni d'un repère orthonormé est le point d'abscisse $\mathrm{Re}(z)$ et d'ordonnée $\mathrm{Im}(z)$.
Pour un point $M = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on dit que $z = a + ib \in \mathbb{C}$ est l'*affixe* de M.

I.2 Conjugué, module

Définition 3 (*Conjugué et module d'un nombre complexe*)

Pour $z = a + ib$ un nombre complexe (avec $a, b \in \mathbb{R}$), on appelle

- *conjugué* de z le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$,
- *module* de z le nombre réel positif $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

si $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$, et $\begin{cases} z \in \mathbb{R} & \Longleftrightarrow & z = \overline{z} \\ z \in i\mathbb{R} & \Longleftrightarrow & z = -\overline{z} \\ z \in \mathbb{U} & \Longleftrightarrow & |z| = 1. \end{cases}$

EXO 1 : donner une équation complexe du disque fermé de rayon 2 centré en $1 + i$, et une écriture par sélection du demi-cercle inférieur centré en $-3i$ et de rayon 1.

Propriété 4 (*Conjugué, module et opérations*)

Pour z, z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$, on a

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- si $z_2 \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

De même :

- $|z|^2 = z\overline{z}$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- si $z_2 \neq 0$, alors $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

On a également les inégalités $|z| \geq 0$, avec égalité ssi $z = 0$ et

$$|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z| \quad \text{et} \quad |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z| \quad \text{et} \quad |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

I.3 Cercle trigonométrique

Préambule : preuve géométrique de $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

Définition 5 (*Exponentielle complexe*)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on définit le nombre complexe $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Propriété 6

- Relation fondamentale de l'exponentielle : pour tout θ et $\theta' \in \mathbb{R}$, on a
$$\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{i\theta'}.$$
- Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\left|\mathrm{e}^{i\theta}\right| = 1$, $\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}$.
- La fonction : $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \longmapsto & \mathrm{e}^{i\theta} \end{cases}$ est 2π-périodique. Restreinte à $[0, 2\pi[$ ou $]-\pi, \pi]$, elle est bijective.
- Formules d'Euler : pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a
$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i\theta}) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i\theta}) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}\ .$$
- Formule de Moivre : pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a
$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\ .$$

Méthode. Factorisation par l'arc moitié : pour a et $b \in \mathbb{R}$,

$$e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{i\frac{b-a}{2}}\right) = 2e^{i\frac{a+b}{2}}\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \; .$$

EXO 2 : factoriser $\cos(p)+\cos(q)$, $\sin(p)-\sin(q)$ et $\cos(p)+\sin(q)$ pour $(p,q) \in \mathbb{R}^2$.

I.4 Forme exponentielle

Définition 7 (*Argument d'un nombre complexe*)

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle *argument* de z, noté $\arg(z)$, tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}.$$

Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : pour z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$,
$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff \arg(z_1) = \arg(z_2) \pmod{2\pi}$.

Propriété 8 (*Forme exponentielle d'un nombre complexe*)

Tout $z \in \mathbb{C}^*$ admet un argument $\theta \in \mathbb{R}$ (non unique) et on a $z = |z|\, e^{i\theta}$.

Propriété 9 (*Calculs sous forme exponentielle*)

Pour $z = \rho e^{i\theta}$, $z' = \rho' e^{i\theta'}$ avec $\rho, \rho' \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$|z| = \rho \;, \quad \overline{z} = \rho e^{-i\theta} \;, \quad z^n = \rho^n e^{in\theta} \;, \quad zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')} \;, \quad \frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta-\theta')} \; .$$

II Exponentielle complexe

Définition 10

L'exponentielle se prolonge sur $\mathbb{C}$ par $\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\,\mathrm{Im}(z)} \end{array} \right.$

Propriété 11

- Pour tout z dans $\mathbb{C}$, e^z a pour module $e^{\mathrm{Re}(z)}$ et pour argument $\mathrm{Im}(z)$.
- Pour tout z_1, z_2 dans $\mathbb{C}$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.
- Pour tout z_1, z_2 dans $\mathbb{C}$, $e^{z_1} = e^{z_2}$ si et seulement si $z_1 - z_2 \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

III Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Propriété 12 (*Racines carrées dans* $\mathbb{C}$)

Tous les nombres complexes admettent une racine carrée dans l'ensemble des nombres complexes, c'est à dire

$$\forall \Delta \in \mathbb{C}, \exists \delta \in \mathbb{C}\,,\ \Delta = \delta^2.$$

De plus, si Δ est non nul, il admet exactement deux racines carrées (opposée l'une de l'autre).

Méthode. Recherche d'une racine carrée sous forme algébrique.

Si $\Delta = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on peut déterminer x et $y \in \mathbb{R}$ tels que $\delta = x + iy$ soit une racine carrée de Δ grâce aux équivalences suivantes :

$$\delta^2 = \Delta \quad \iff \quad \begin{cases} |\delta|^2 = |\Delta| \\ \mathrm{Re}(\delta^2) = \mathrm{Re}(\Delta) \\ \mathrm{Im}(\delta^2) = \mathrm{Im}(\Delta) \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ x^2 - y^2 = \alpha \\ \;\; 2xy \;\; = \beta \end{cases}$$

Définition 13 (*Polynôme de degré 2 et discriminant*)

Pour a, b et $c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$,
- $P(z) = az^2 + bz + c$ est un polynôme de degré 2 à coefficients complexes,
- les racines de P sont les solutions de l'équation $P(z) = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$,
- le *discriminant* de P est $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété 14 (*Racines d'un polynôme de degré 2 à coefficients complexes*)

Pour $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carrée du discriminant Δ de $P(z) = az^2 + bz + c$, les racines de P sont

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} \;,$$

et l'on peut factoriser : $P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Dans le cas où Δ est nul, on obtient donc une racine double $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$, et $P(z) = a(z - z_0)^2$.

Remarque : si P est à coefficients réels, soit les deux racines sont réelles ($\Delta > 0$), soit complexes conjuguées deux à deux ($\Delta < 0$), soit racine doublé réelle ($\Delta = 0$).

Conséquence : sous cette forme factorisée, on lit $az_1z_2 = c$ et $-a(z_1 + z_2) = b$.

Propriété 15 (*Système somme-produit.*)

Soit S et P deux nombres complexes. Les solutions du système

$$\begin{cases} x+y=S \\ x\,y\ =P \end{cases}$$

sont les couples (z_1,z_2) et (z_2,z_1), où z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $z^2 - S\,z + P = 0$ (en présence d'une racine double $z_0 = z_1 = z_2$, il n'y a donc qu'un couple solution, à savoir (z_0,z_0)).

EXO 3 : Résoudre le système dans $\mathbb{C}^2$ le système $\begin{cases} z+\tilde{z}=2i, \\ z\,\tilde{z}\ =3. \end{cases}$

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On dit qu'une suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifie une *relation de récurrence linéaire d'ordre* 2 s'il existe des constantes complexes a et b telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n. \qquad (*)$$

On appelle l'équation $r^2 = ar + b$ d'inconnue r l'*équation caractéristique* de la relation de récurrence $(*)$.

Propriété 16

- Si r est solution de l'équation caractéristique, alors la suite de terme général $u_n = r^n$ vérifie la relation de récurrence considérée.
- Si r est racine double du polynôme donnant l'équation caractéristique, alors la suite de terme général $v_n = nr^n$ vérifie également la relation de récurrence $(*)$.

Théorème 17

Soit u une suite vérifiant la relation de récurrence $(*)$.

- Si l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}$, alors il existe des constantes $(A,B) \in \mathbb{C}^2$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

- Si r est racine double du polynôme donnant l'équation caractéristique, alors il existe des constantes $(A,B) \in \mathbb{C}^2$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = Ar^n + Bnr^n.$$

Méthode. Pour déterminer A et B, on utilise le couple de données initiales (u_0,u_1).

EXO 4 : déterminer le terme général des suites u et v ainsi définies par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = i, \\ u_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3+i)u_{n+1} - 3iu_n, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 0, \\ v_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 4v_{n+1} - 5v_n. \end{cases}$$

Propriété 18 (*Suite réelle récurrente linéaire d'ordre deux*)

Soit u une suite vérifiant la relation de récurrence $(*)$, dans le cas réel où a et b sont réels, ainsi que les conditions initiales définissant u.
Si l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2 **complexes conjuguées** (cas $\Delta < 0$), données sous formes exponentielles $z_1 = \rho e^{i\theta}$ et $z_2 = \rho e^{-i\theta}$, alors il existe des constantes **réelles** (A,B) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A\rho^n \cos(n\theta) + B\rho^n \sin(n\theta).$$

IV Racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

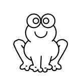
Définition 19

On appelle *racines $n^{\text{èmes}}$ de* 1, ou *de l'unité*, les solutions complexes de l'équation $z^n = 1$. L'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Propriété 20

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in [\![0,n-1]\!] \right\} = \left\{ \omega^k \mid k \in [\![0,n-1]\!] \right\} \subset \mathbb{U},$$

avec $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ la « première racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité non-triviale », appelée aussi *racine primitive $n^{\text{ème}}$ de l'unité*.



- $\mathbb{U}_2 = \{-1,1\}$
- $\mathbb{U}_4 = \{-1,1,-i,i\}$
- $\mathbb{U}_3 = \left\{1,\ e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\} = \{1,j,j^2\}$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Propriété 21

Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, on a $\overline{\omega^k} = \omega^{-k} = \omega^{n-k} \in \mathbb{U}_n$. De plus :

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0.$$

Interprétation graphique : les points du plan d'affixe les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité sont les sommets du polygone régulier à n sommets inscrit dans le cercle unité et passant par le point d'affixe 1. Le barycentre de ces points est l'origine du plan.

EXO 5 : soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $u = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $v = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$, Calculer $u + v$ et uv, et en déduire u et v.

Définition 22

Si $a \in \mathbb{C}$, on appelle *racines $n^{\text{èmes}}$ de a* les solutions de l'équation $z^n = a$.

Propriété 23

La seule racine $n^{\text{ème}}$ de 0 est 0. Si $a \neq 0$, notons $a = re^{i\theta}$. On a :

$$z^n = a \Longleftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] : z = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \omega^k.$$

EXO 6 : Déterminer les racines quatrièmes de $-7 - 24i$.

V Géométrie et transformations du plan complexe

V.1 Alignement et orthogonalité

Soient A, B, C trois points distincts du plan, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. Sa norme vaut donc $|z_B - z_A|$ et son angle avec (Ox) vaut $\arg(z_B - z_A)$.
- L'angle $BAC = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est égal à $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$.

EXO 7 : dans les deux cas, déterminer l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie la relation demandée :

$$\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{2} \mod 2\pi \quad ; \quad \arg\left(\frac{z - 2i}{z - 1 + i}\right) = \frac{\pi}{2} \mod \pi.$$

Propriété 24

1. A, B, C sont alignés
$\Longleftrightarrow \left(\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 \mod \pi\right) \Longleftrightarrow \left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}\right)$,
2. (AB) et (AC) sont perpendiculaires (en A)
$\Longleftrightarrow \left(\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} \mod \pi\right) \Longleftrightarrow \left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}\right)$.

EXO 8 : déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixe z, z^2 et z^4 sont alignés.

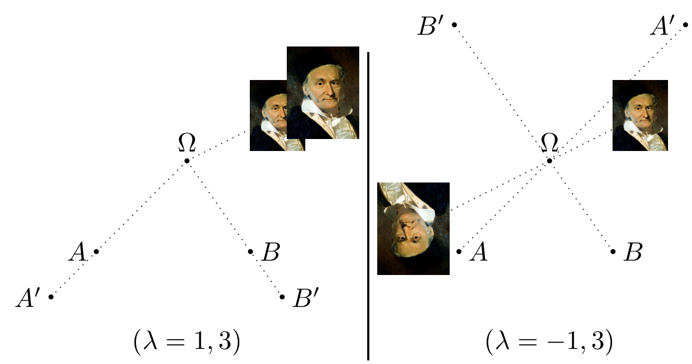
V.2 Transformations du plan

Définition 25

Une *transformation du plan* est une bijection $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ou $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

- La fonction $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array}\right.$ est une transformation du plan. Elle correspond géométriquement à la symétrie d'axe (Ox).
- Pour $a = x + iy \in \mathbb{C}$, la transformation $z \mapsto z + a$ correspond à la *translation* de vecteur (x, y). Sa réciproque est la translation de vecteur opposé $(-x, -y)$: $z \mapsto z - a$.
- Pour $a = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, la transformation $z \mapsto az$ correspond :
  - si $a = r$: à l'*homothétie* de centre O et de rapport r. Sa réciproque est l'homothétie de centre O et de rapport inverse : $z \mapsto \frac{z}{r}$,
    ⚠ une homothétie de rapport négatif inverse les angles.
  - si $a = e^{i\theta}$: à la *rotation* de centre O et d'angle θ. Sa réciproque est la rotation de centre O et d'angle opposé $-\theta$: $z \mapsto e^{-i\theta} z$,
  - si $a = re^{i\theta}$: à la *similitude* de centre O, de rapport r et d'angle θ, c'est-à-dire à la composée de l'homothétie de rapport r et de la rotation d'angle θ. Sa réciproque est la similitude de centre O, de rapport $\frac{1}{r}$ et d'angle $-\theta$: $z \mapsto \frac{1}{r} e^{-i\theta} z$.

EXO 9 : donner l'expression de l'*homothétie ponctuelle* de centre Ω d'affixe ω et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$. (C'est la transformation qui envoie tout point M sur l'unique point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$.)



EXO 10 : décrire la transformation $z \mapsto 3 - i + 2iz$.
EXO 11 : déterminer la *rotation ponctuelle* de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ.