Calcul d'intégrales

Définition 1

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$. On admet que f admet une primitive, c'est-à-dire une fonction F telle que $F'=f$. On définit

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a)$$

Notations : On note $[F(t)]_a^b = F(b)-F(a)$.

- On a $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, on dit que la variable d'intégration est *muette*.
- La définition de $\displaystyle\int_a^b f$ ne dépend pas de la primitive F choisie.

EXO 1 : calculer $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{2u+3}\,\mathrm{d}u$, $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Propriété 2

Soit f, g des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, a,b,c et λ des réels. On a :

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ (relation de Chasles)
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)+g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ (linéarité de l'intégrale)
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$

EXO 2 : calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x^2+x+4}{x^3+2x^2+x+2}\,\mathrm{d}x$ en déterminant des constantes réelles a et b telles que l'intégrande coïncide avec $x\mapsto \dfrac{a}{x^2+1}+\dfrac{b}{x+2}$.

Propriété 3 (*Intégration par parties*)

Soit u,v deux fonctions dérivables de dérivées continues, alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

EXO 3 : calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

Propriété 4 (*Changement de variables*)

Soit f une fonction continue et u une fonction dérivable de dérivée continue. On a

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

En pratique :

- exprimer la nouvelle variable x en fonction de l'ancienne t : $x=u(t)$.
- exprimer dx en fonction de $\mathrm{d}t$: on a $\mathrm{d}x = u'(t)\mathrm{d}t$ car $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = u'(t)$.
- modifier les bornes : si t varie de a à b, x varie de $u(a)$ à $u(b)$.
- simplifier $f(x)\mathrm{d}x$ en s'assurant de bien éliminer tous les t.

⚠ Garder l'ordre des bornes $u(a)$ et $u(b)$ **même si** $u(a)$ est supérieur à $u(b)$.

EXO 4 : Calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$ avec le changement de variable $x=t^2$.

EXO 5 : Soit f une fonction paire, que vaut $\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$? et si f est impaire ?

I Vocabulaire des équations différentielles

Dans tout ce qui suit, on note $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 5

Une *équation différentielle* est une équation reliant une fonction $I\to\mathbb{K}$ inconnue (généralement notée y) à ses dérivées successives. Cette équation peut être accompagnée de conditions sur les valeurs prises par la fonction et ses dérivées en un point, appelées *conditions initiales*.

► Quelques exemples :

$$y''=-y,\qquad \begin{cases} y' &= y\\ y(0) &= 1\end{cases}\qquad y'=1+y^2,\qquad \forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ y'(t)=\frac{y(t)}{t}.$$

On peut écrire cette dernière équation sous la forme : $y'=\dfrac{y}{t}$, en gardant à l'esprit la formulation exacte.

► On parle d'équation différentielle *ordinaire*, en opposition aux équations aux *dérivées partielles* vues en physique.

► On dit que l'équation est *résolue* si le coefficient devant la dérivée de plus grand ordre est égal à 1. On s'y ramènera si ça n'est pas le cas.

Définition 6

Une équation différentielle *linéaire* d'ordre $n \in \mathbb{N}$ et d'inconnue $y : I \to \mathbb{K}$ est une équation différentielle de la forme :

$$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n, b : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions, où a_n ne s'annule pas sur I.

Définition 7

L'*équation homogène* associée à l'équation ci-dessus est l'équation différentielle « sans second membre » d'inconnue $y_h : I \to \mathbb{K}$:

$$a_n y_h^{(n)} + \ldots + a_1 y_h' + a_0 y_h = 0.$$

Exo 6 : ▶ montrer que si y et $\tilde{y}$ sont solutions d'une même équation différentielle linéaire, $y - \tilde{y}$ est solution de l'équation différentielle homogène associée.
▶ montrer que si y_h est solution d'une équation différentielle homogène, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, λy_h est solution de la même équation.

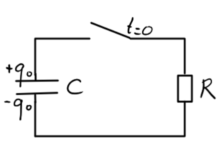
Propriété 8 (*Structure des solutions*)

Soit y_p une solution (dite *particulière*) d'une équation différentielle linéaire, et S_h l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée. Alors l'ensemble S des solutions de l'équation différentielle considérée est donné par :

$$S = \{y_p + y_h \; ; \; y_h \in S_h\}.$$

II Équations différentielles linéaires d'ordre 1

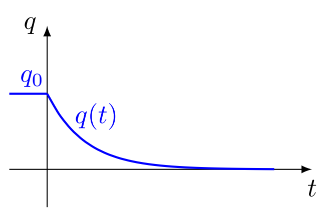
Exemple : décharge d'un condensateur avec/sans forçage



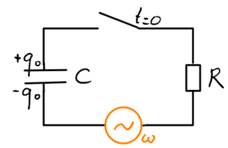
Équa. diff. homogène :

$$\frac{dq}{dt}(t) + \frac{1}{RC} q(t) = 0$$

avec charge initiale $q(0) = q_0$.
Solution :
$q(t) = q_0 \exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right)$



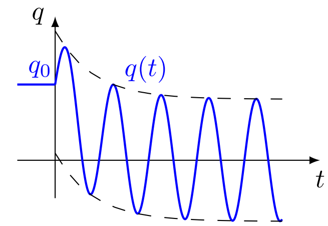
Charge du condensateur en fonction du temps



Équa. diff. avec 2nd membre :

$$\frac{dq}{dt}(t) + \frac{1}{RC} q(t) = \frac{E}{R}\cos(\omega t)$$

avec charge initiale $q(0) = q_0$.
Solution ? ?



Charge du condensateur en fonction du temps

Résolution des équations linéaires d'ordre 1

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues. On étudie l'équation

$$\forall t \in I, \qquad y'(t) + a(t)y(t) = b(t),$$

d'inconnue la fonction dérivable $y : I \to \mathbb{K}$.

1. Résolution de l'équation homogène

Propriété 9

▶ Soit A une primitive de a sur I. L'ensemble des solutions S_h de l'équation $y_h' + a y_h = 0$ est égal à :

$$S_h = \left\{ y_h : t \mapsto \lambda e^{-A(t)} \; ; \; \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

▶ Si $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, l'unique solution vérifiant $y_h(t_0) = y_0$ est donnée par

$$y_h(t) = y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(u)\, du\right).$$

Cas important : si a est un coefficient constant, $S_h = \{y_h : t \mapsto \lambda e^{-ta} \; ; \; \lambda \in \mathbb{K}\}$..

Exo 7 : résoudre l'équation $y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
Exo 8 : résoudre l'équation $y'(t) + ty(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
Exo 9 : résoudre l'équation $(1 + t^2)y'(t) + y(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

2. Détermination d'une solution particulière

On cherche d'abord s'il existe une solution évidente à l'équation avec 2nd membre.
Cas important : si a et b sont des coefficients constants,

- ▶ si a est non nul, alors la fonction constante $y_p = \frac{b}{a}$ est solution,
- ▶ si a est nul, alors la fonction affine $y_p : t \mapsto bt$ est solution.

Autre cas particulier : si le second membre a une forme exponentielle, polynomiale ou sinusoïdale, on peut chercher une solution particulière de la même forme.

Cas général : **Méthode de la variation de la constante.**
Soit y_h une solution non nulle de l'équation homogène : elle ne s'annule pas.
▶ on cherche une solution particulière sous la forme $y = \lambda y_h$ avec $\lambda : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
▶ en utilisant que y_h est solution de l'équation homogène, on obtient :

$$y' + ay = b \iff (\lambda y_h)' + a\lambda y_h = b \iff \lambda' y_h = b.$$

▶ ainsi si λ est une primitive de $\dfrac{b}{y_h}$, on obtient une solution particulière $y_p = \lambda y_h$.

Cette méthode donne la *formule de Duhamel*, à ne pas apprendre mais retrouver au cas par cas : si $t_0 \in I$, une solution particulière de l'équation est donnée par

$$y_p : t \mapsto e^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} b(x) e^{A(x)} dx.$$

3. Conclusion

Méthode. Après avoir déterminé l'ensemble des solutions homogènes S_h et une solution particulière y_p, on conclut grâce à la Propriété 8 : l'ensemble S des solutions de l'équation différentielle considérée est égal à

$$S = \{y_p + y_h \ ; \ y_h \in S_h\} = \{y_p + \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} \ ; \ \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Structure : on dira que S est une *droite affine*, dirigée par le *sous-espace vectoriel* S_h qui est de dimension 1.

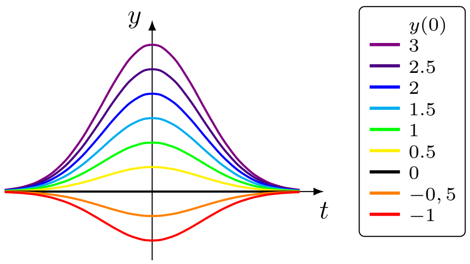
Cas particulier important : si a et b sont des coefficients constants,

- si a est non nul, alors $S = \left\{ y : t \mapsto \lambda e^{-at} + \dfrac{b}{a} \ ; \ \lambda \in \mathbb{K} \right\}$,
- si a est nul, alors $S = \{y : t \mapsto \lambda + bt \ ; \ \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Exo 10 : résoudre l'équation $y' - y = 3$ sur $\mathbb{R}$.
Exo 11 : résoudre l'équation $y'(t) + ty(t) = t^3$ sur $\mathbb{R}$.

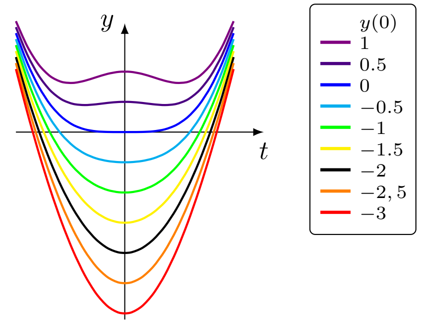
Exemple :
▶ courbes représentatives des solutions de

$$y'(t) + ty(t) = 0.$$



▶ courbes représentatives des solutions de

$$y'(t) + ty(t) = t^3.$$



Propriété 10 (*Principe de superposition*)

Soient $a, b_1, b_2 : I \to \mathbb{K}$ continues.
Si $y_{p,1}$ est solution de l'équation $y' + ay = b_1$,
et si $y_{p,2}$ est solution de l'équation $y' + ay = b_2$,
alors $y_p = y_{p,1} + y_{p,2}$ est solution de l'équation $y' + ay = b_1 + b_2$.

Exo 12 : résoudre l'équation $y' - y = t + \mathrm{e}^{\alpha t}$ sur $\mathbb{R}$.

4. Problème de Cauchy

Définition 11 (*Problème de Cauchy d'ordre 1 linéaire*)

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues, et soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Le système

$$\begin{cases} y' + ay = b & \text{sur } I, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

est le *problème de Cauchy* d'équation $y' + ay = b$ et de *condition initiale* $y(t_0) = y_0$.

Théorème 12 (*Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire*)

Tout problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 a une et une seule solution.

Méthode. Pour résoudre un problème de Cauchy :

- on résout l'équation différentielle homogène associée,
- on détermine une solution particulière de l'équation différentielle, soit avec talent, soit avec la méthode de la variation de la constante,
- on écrit la forme générale des solutions de l'équation différentielle,
- on détermine la constante à l'aide de la donnée initiale.

Exo 13 : résoudre $\begin{cases} y'(x) + \tan(x) y(x) = \cos(x^2) & \text{pour tout } x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

III Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On étudie l'équation

$$\forall t \in I, \quad y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t),$$

d'inconnue la fonction deux fois dérivable $y : I \to \mathbb{K}$.

1. Résolution de l'équation homogène

On note S_h l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée :

$$y_h'' + ay_h' + by_h = 0.$$

Pour $r \in \mathbb{K}$, la fonction $t \mapsto e^{rt}$ est solution de l'équation homogène si et seulement si $\boxed{r^2 + ar + b = 0}$, ce qu'on appelle *équation caractéristique* de l'équation différentielle.

Propriété 13

Notons $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique.

- Si $\Delta \neq 0$, notons r_1, r_2 les deux racines distinctes de l'équation caractéristique. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est alors

$$S_h = \{y_h : t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \; ; \; (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}.$$

- Si $\Delta = 0$, notons r_0 la racine double de l'équation caractéristique. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est alors

$$S_h = \{y_h : t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_0 t} \; ; \; (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}.$$

Propriété 14 (*Cas réel*)

On suppose a, b réels et on note ici S_h l'ensemble des solutions *à valeurs réelles* de l'équation homogène $y_h'' + ay_h' + by_h = 0$.

- Si $\Delta < 0$, avec $r = R + i\omega$ et $\overline{r} = R - i\omega$ les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique, alors

$$S_h = \{y_h : t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{Rt} \cos(\omega t) + \mu \mathrm{e}^{Rt} \sin(\omega t) \; ; \; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

- Dans le cas particulier où $a = 0$ et $b < 0$, les racines sont opposées : en les notant $\pm r$, on a alors

$$S_h = \{y_h : t \mapsto \lambda \operatorname{ch}(rt) + \mu \operatorname{sh}(rt) \; ; \; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

2. Détermination d'une solution particulière

Propriété 15 (*Solution particulière pour cas particuliers*)

- Si f est polynomiale, il existe une solution particulière polynomiale de degré inférieur ou égal.
- Si $f : t \mapsto \alpha \mathrm{e}^{i\beta t}$ avec α et β dans $\mathbb{K}$, alors
  - si β n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors il existe une solution particulière de la forme $y_p : t \mapsto k e^{\beta t}$, avec $k \in \mathbb{K}$,
  - si β est racine simple, alors il existe une solution particulière de la forme $y_p : t \mapsto kte^{\beta t}$, où $k \in \mathbb{K}$,
  - si β est racine double, alors il existe une solution particulière de la forme $y_p : t \mapsto kt^2 e^{\beta t}$, où $k \in \mathbb{K}$.
- Si $f : t \mapsto A\cos(\omega t)$ avec A et ω des réels, alors on détermine une solution particulière pour un second membre complexe $t \mapsto A\mathrm{e}^{i\omega t}$, en utilisant ce qui précède, puis on prend la partie réelle de cette solution.

Propriété 16 (*Principe de superposition*)

Soient $f_1, f_2 : I \to \mathbb{K}$ continues.
Si $y_{p,1}$ est solution de l'équation $y'' + ay' + by = f_1$,
et si $y_{p,2}$ est solution de l'équation $y'' + ay' + by = f_2$,
alors $y_p = y_{p,1} + y_{p,2}$ est solution de l'équation $y'' + ay' + by = f_1 + f_2$.

3. Problème de Cauchy

Une équation d'ordre 2 régit l'*accélération* d'un objet. La détermination de son état à tout temps nécessite de connaître la fois sa *position* et sa *vitesse* initiales.

Définition 17 (*Problème de Cauchy linéaire d'ordre 2 à coefs constants*)

Soient $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, $f : I \to \mathbb{K}$ continue, et soit $(t_0, y_0, v_0) \in I \times \mathbb{K}^2$. Le système

$$\left\{ \begin{array}{rcll} y'' + ay' + by & = & f & \text{sur } I, \\ y(t_0) & = & y_0, & \\ y'(t_0) & = & v_0, & \end{array} \right.$$

est le *problème de Cauchy* d'équation $y'' + ay' + by = f$ et de *conditions initiales* $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = v_0$.

Théorème 18 (*Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire*)

Tout problème de Cauchy linéaire d'ordre 2 a une et une seule solution.