OPTIMISATION DANS $\mathbb{R}^2$

Convexité

On commence par deux définitions :

- On dit qu'un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ est *convexe* s'il contient tous ses barycentres, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in D, \quad \forall t \in [0,1], \quad tx + (1-t)y \in D.$$

- Si D est un domaine convexe de $\mathbb{R}^2$ on dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction *convexe* si :

$$\forall x, y \in D, \quad \forall t \in [0,1], \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Ex 1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que f est convexe si et seulement si l'ensemble $\{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \,|\, y \geq f(x)\}$, appelé *épigraphe de* f, est convexe.

Ex 2 (Convexité et optimisation)**.**
Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^1.

1. Montrer que : $\forall x, y \in U, \quad f(y) - f(x) \geq \nabla f(x) \cdot (y - x)$.
   Indication : on pourra considérer l'application $g : t \mapsto f((1-t)x + ty)$.
2. En déduire que si f admet un point critique, elle atteint un minimum global en ce point critique.
3. Montrer que si f admet un minimum local, c'est en fait un minimum global.
4. Montrer que si f admet un minimum, l'ensemble des points en lequel f atteint ce minimum est convexe.
5. La fonction f peut-elle présenter un maximum global ? local ?

Multiplicateurs de Lagrange

Ex 3 (Optimisation sous contrainte)**.**
Déterminer les extrema des fonctions suivantes en paramétrant l'espace de contraintes (dessin exigé).

1. $f(x,y) = 3x - y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 5$.
2. $f(x,y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $x + 2y = 6$.
3. $f(x,y) = (xy)^a$ sous la contrainte $2x + 3y = 12$, où $a > 0$.

Ex 4. Quelle est le périmètre minimal d'un rectangle d'aire 25 ?

Ex 5 (Premiers pas vers les multiplicateurs de Lagrange.)**.** On considère les deux problèmes d'optimisation suivants : déterminer les extrema de $f(x,y) = 3x + 7y$ sous la contrainte $x^2 + 4y^2 = 5$ et les extrema de $f(x,y) = x^2 + (y-3)^2$ sous la contrainte $y - x^2 = -2$.

Pour chaque exemple, tracer les contraintes et quelques niveaux de la fonction à optimiser. Représenter le champ de gradient de f en quelques points ainsi que le gradient de la fonction définissant la contrainte le long de cette contrainte. Déterminer graphiquement les extrema considérés.

Ex 6 (Théorème des extrema liés / des multiplicateurs de Lagrange)**.**

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction qu'on souhaite optimiser et $g : U \to \mathbb{R}$ une fonction qu'on appellera *contrainte*. On suppose ces deux fonctions de classe C^1 sur U.

Soit c un réel. On dira qu'on minimise (ou maximise) la fonction f *sous la contrainte* $g = c$, lorsqu'on minimise (ou maximise) f sur le domaine de contrainte $\{x \in U | g(x) = c\}$. On note $V(c) = \min\limits_{g(x)=c} f(x)$.

Théorème des extrema liés.

Si f réalise un minimum sous la contrainte $g = c$ en $a \in U$ et si $\nabla g(a) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, alors il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a).$$

On appelle λ le *multiplicateur de Lagrange* associé ce problème d'optimisation.

Remarque : ce théorème donne une condition <u>nécessaire</u> d'optimalité sous contrainte.

1. On admet qu'il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0 et un chemin $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 tels que $g(\gamma(t)) = c$ pour tout $t \in I$ et $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$. Montrer que $\gamma'(0) \perp \nabla g(a)$.

2. Montrer que $f \circ \gamma$ atteint un extremum local en 0. En déduire que $\gamma'(0) \perp \nabla f(a)$.

3. Prouver le théorème.

4. *Le multiplicateur de Lagrange donne la dérivée de la valeur optimale :*

   Soit $I \subset \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe une fonction $x : I \to U$ de classe C^1 telle que $\forall c \in I,\ \begin{cases} g(x(c)) = c, \\ V(c) = f(x(c)), \\ \nabla g(x(c)) \neq 0_{\mathbb{R}^2}. \end{cases}$

   Montrer qu'il existe $\lambda(c)$ tel que $\nabla f(x(c)) = \lambda(c) \nabla g(x(c))$ et montrer qu'alors $V'(c) = \lambda(c)$.

Remarque : ceci permet d'approcher les valeurs optimales de problèmes perturbés (cf ex. 8).

Pour aller plus loin. ⚠ fonctions de trois variables !

On peut associer à notre problème d'optimisation une fonction $L : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, appelée lagrangien (ce n'est pas un vrai lagrangien physique), définie pour $(x, \lambda) \in U \times \mathbb{R}$ par :

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda(g(x) - c).$$

5. Montrer que L est de classe C^1 sur son domaine, et déterminer ses dérivées partielles.

6. Soit $(x, \lambda) \in U \times \mathbb{R}$. Montrer que $f(x) = L(x, \lambda)$ si $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x, \lambda) = 0$.

7. Énoncer le théorème des extrema liés à l'aide de ce lagrangien.

8. Supposons à présent U ouvert et convexe, f convexe et g affine. Montrer que L est convexe et en déduire une condition <u>suffisante</u> d'optimalité pour le problème d'optimisation sous contrainte considéré.

Ex 7 (Sans l'hypothèse)**.** Optimiser la fonction $f(x, y) = x$ sous la contrainte $x^3 - y^2 = 0$, en traçant cette contrainte. Le théorème des extrema liés est-il vérifié ?

Ex 8 (Multiplicateurs de Lagrange)**.** 1. Calculer $V(c) = \max x^2 y$ sous la contrainte $4x^2 + y^2 = c$, pour $c > 0$. Vérifier que $V'(c)$ correspond au multiplicateur de Lagrange associé au point réalisant le maximum.

2. Déterminer $\min x^2 - y^2$ sous la contrainte $x + y = 1$ puis approcher à l'ordre 1 la quantité $\min x^2 - y^2$ sous les contraintes $x + y = 1.1$.