RÉCURRENCE

Rappels sur les suites

Définition 1

Une suite réelle *est une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$*, c'est-à-dire qu'à chaque entier* n *on associe un nombre réel, appelé terme de rang* n *de la suite.*

Notation. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou (u_n) la suite dont le terme de rang 0 est le nombre réel u_0, le terme de rang 1 est u_1, etc.

Vocabulaire. On distingue différentes manières de définir une suite :

- explicite : terme u_n défini en fonction du rang n.
- par récurrence : terme u_{n+1} défini en fonction du (ou parfois *des*) terme précédent u_n.

Exemple. On définit la factorielle d'un entier n, notée $n!$, par récurrence : $\begin{cases} 0! = 1, & \text{(initialisation)} \\ \forall n \in \mathbb{N}^\star, n! = n(n-1)!. & \text{(hérédité)} \end{cases}$

Définition 2

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* majorée *si :* $\exists M \in \mathbb{R}$, ________________________________.
  Dans ce cas, M *est un* majorant *de* (u_n).
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* minorée *si :* $\exists m \in \mathbb{R}$, ________________________________.
  Dans ce cas, m *est un* minorant *de* (u_n).
- *Une suite est dite* bornée *lorsqu'elle est minorée* **et** *majorée.*

⚠ Un majorant/minorant ne doit **pas** dépendre du rang.

Ex 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Montrer que la suite (u_n) est bornée ssi la suite $(|u_n|)$ est majorée.

Définition 3 (*Sens de variation*)

- (u_n) *est dite* croissante *lorsque* ________________________________.
- (u_n) *est dite* strictement croissante *lorsque* ________________________________.
- (u_n) *est dite* décroissante *lorsque* ________________________________.
- *Une suite croissante ou décroissante est dite* monotone.

Méthode. Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on peut au choix :

- étudier, pour n quelconque, le signe de $u_{n+1} - u_n$,
- si $u_n > 0$ pour tout n, comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Ex 2. Soient u et v deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(n+1)!}{2^n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{1+v_n^2}{2}$.
Étudier leur monotonie.

Ex 3. Traduire avec des quantificateurs les assertions suivantes, ainsi que leur négation.

(i) La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est nulle.

(ii) La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ s'annule au moins une fois.

(iii) La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ s'annule au plus une fois.

(iv) La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ ne prend que des valeurs strictement inférieures à 2.

(v) La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

Raisonnements par récurrence

Ex 4. 1. Traduire avec des quantificateurs l'axiome "toute partie de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément". Déduire de cet axiome le principe de récurrence simple (cf. fiche *Raisonnements*).

2. En se ramenant au principe de récurrence simple, justifier les principes de récurrence double et forte.

Définition 4 (*Suites arithmétiques et géométriques*)

- *Une suite* u *est dite* arithmétique *s'il existe un nombre réel* r *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
- *Une suite* u *est dite* géométrique *s'il existe un nombre réel* q *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.

⚠ Dans les deux cas, la *raison* r ou q ne doit **pas** dépendre du rang n.

Ex 5 (Terme général des suites usuelles). Montrer par récurrence les résultats suivants.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$.

⚠ à connaître impérativement ! savoir retrouver très vite l'expression même si le rang initial est non nul.

Définition 5 (*Suite arithmético-géomtrique*)

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* arithmético-géométrique *de coefficients* a *et* $b \in \mathbb{R}$ *lorsque*

$$\textit{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

Ex 6 (Terme général d'une suite arithmético-géométrique). Soit u une telle suite, avec $a \neq 1$.

1. *Point fixe.* Montrer que l'équation associée $\boxed{\ell = a\ell + b}$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}$.
2. On définit la suite auxiliaire w par $w_n = u_n - \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que w est géométrique (raison ?).
3. En déduire l'expression du terme général de (u_n) en fonction de a, de ℓ et de u_0.
4. Application : en déroulant cette méthode, déterminer le terme général des suites u et v définies par
   - $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$.
   - $v_1 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + 3$.

Ex 7 (Récurrence double). On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1, \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 0, u_{n+2} = 5\,u_{n+1} - 6\,u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.

Ex 8 (Inégalité de Bernoulli). Montrer que : $\forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}^\star, (1+x)^n \geq 1 + nx$.

Ex 9. Montrer que la somme de trois cubes (d'entiers positifs) consécutifs est divisible par 9.