NOMBRES RÉELS :

OPÉRATIONS, ORDRE ET VALEUR ABSOLUE.
RÉSOLUTION D'(IN)ÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

- Ensembles de nombres : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
- Opérations: somme, produit, opposé, inverse, quotient, puissances, racine carrée.
- Ordre dans $\mathbb{R}$: inégalité stricte et large, signe, encadrement, intervalles.

Ex 1 (Vrai ou faux : quantificateurs et connecteurs). Déterminer si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse (en le démontrant). On énoncera la négation des assertions fausses.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y>0$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x+y>0$;

(iii) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, x+y>0$;

(iv) $\exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x+y>0$;

(v) $\forall x \in \mathbb{R}, \big(\forall y \in \mathbb{R}, xy=0\big) \implies x=0$;

(vi) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy=0 \implies x=0$;

(vii) $\forall n \in \mathbb{Z}, (n \geq 0$ ou $n \leq 0)$;

(viii) $(\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0)$ ou $(\forall n \in \mathbb{Z}, n \leq 0)$.

Ex 2. Montrer que le produit de deux entiers impairs est toujours impair.

Ex 3. Soient a et b des réels. Montrer que $\big(\forall n \in \mathbb{N},\ a3^n + b(-1)^n = 0\big) \iff a=0$ et $b=0$.

1 Règles de calcul

Ex 4. Simplifier, sous forme de fraction irréductible, les expressions suivantes :

$$\frac{2}{3} - 0{,}2\,; \qquad \frac{13}{21} + \frac{7}{15} - \frac{3}{35}\,; \qquad \left(\frac{135}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}\right) \times \frac{35}{48}\,; \qquad 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right).$$

Ex 5. Pour a et b deux nombres réels non nuls tels que $a+b \neq 0$ et $a-b \neq 0$, simplifier :

$$\frac{1}{ab} \times \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}\,; \qquad \frac{\frac{a+b}{ab}}{a-b}\,; \qquad \frac{a+b}{\frac{ab}{a-b}}\,; \qquad \frac{\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b}}{\frac{a-b}{a+b}+1}\,; \qquad \frac{a^3-b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}.$$

Ex 6. Soient a et b deux réels non nuls. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation en x : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{x+a+b}$.

Propriété 1 (*Puissances, racine carrée*)

Pour x et y des réels et n et m des entiers :

$$x^m x^n = x^{m+n}\,, \quad \big(x^m\big)^n = x^{mn}\,, \quad x^n y^n = (xy)^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = x^{-n} \text{ si } x \neq 0.$$

Pour x et y positifs :

$$(\sqrt{x})^2 = x, \quad \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}, \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \text{ si } y \neq 0, \quad (\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = x-y.$$

Ex 7. Simplifier les expressions suivantes, où k désigne un entier, sous la forme $\alpha \times \beta^k$.

$$\frac{3^k \times 2^{2k+1}}{5^{k-1}}\,; \qquad \frac{3^k + 3^{k+1}}{2^k - 2^{k-1}}\,; \qquad \frac{\big((-1)^k - (-1)^{k+1}\big)^2}{(-2)^{2k+1}}\,.$$

Ex 8. Simplifier : $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,; \qquad \left(\sqrt{7-2\sqrt{6}} + \sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2\,; \qquad \dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \sqrt{\dfrac{3}{8}}\,.$

2 Inégalités

Propriété 2 (*Inégalités et opérations*)

Pour a, b, c, d et λ des réels, on a

- *si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$.*
- *si $a \leqslant b$ et $\lambda \geqslant 0$, alors $\lambda a \leqslant \lambda b$,*
- *$a \leqslant b$ si et seulement si $-b \leqslant -a$,*
- *si $0 < a \leqslant b$, alors $0 < \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.*
- *si f est une fonction croissante et $a \leqslant b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$.*

Ex 9. (a) Soient a et b dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(a+b)^2 \geq 4ab$.

(b) En déduire que : $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^3,\ (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

(c) En déduire que : $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3,\ (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq 9$.

Ex 10 (Disjonction). Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 \geq x$. Montrer que $x \leq 0$ ou $x \geq 1$.

Ex 11 (Contraposée). Montrer l'assertion $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y > 2 \implies x > 1$ ou $y > 1$.

Ex 12. Résoudre les inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$. Donner chaque ensemble de solutions à l'aide d'intervalles.

(a) $x^2 \leqslant 4$, (b) $\dfrac{3}{x} < \dfrac{x}{3}$, (c) $\dfrac{2x+1}{x+3} \leqslant 2$, (d) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2x-1} > 0$.

3 Valeur absolue

Définition 3 (*Valeur absolue*)

Pour x un réel, on définit $|x| = x$ si $x \geqslant 0$, et $|x| = -x$ si $x < 0$.

Remarques. $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x| \geq 0, \qquad \sqrt{x^2} = |x|, \qquad -|x| \leqslant x \leqslant |x|$ et $|x^2| = x^2 = |x|^2$.

Propriété 4 (*Valeur absolue, opération et inéquations*)

Pour x, a et d des réels, on a

- *$|xy| = |x||y|$,*
- *$|x - a| \leqslant d$ si et seulement si $x \in [a - d, a + d]$.*
- *$|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (Inégalité triangulaire).*
- *$x^2 \leqslant a^2 \iff |x| \leqslant |a| \iff -|a| \leq x \leq |a|$.*

Ex 13. Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(a) $|x+5| = x - 2$, (b) $|2x - 1| = |x + 4|$, (c) $|x - 1| \leq |x + 3|$, (d) $|3x| \leq |2x + 3|$.

Ex 14. Résoudre les équations et inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(a) $x - 3\sqrt{x} - 10 = 0$,

(b) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3} = 2x$,

(c) $\sqrt{x-1} \leq \sqrt{2x-5}$,

(d) $\sqrt{x - 4\sqrt{x} + 4} \geq 3$,

(e) $\dfrac{x^2 - 9x + 6}{x^2 - 4x + 3} < 2$.