Devoir maison 1 - correction

Exercice 1

(a) $\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right| \geq 2$: cette inéquation est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Procédons par chaîne d'équivalences.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Alors

$$\left|\frac{x-1}{x+3}\right| \geq 2 \iff \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2 \geq 4 \boxed{\iff} (x-1)^2 \geq 4(x+3)^2 \iff \cdots \iff 3x^2+26x+35 \leq 0,$$

l'équivalence encadrée étant vraie puisqu'on a supposé x différent de -3.

Pour le dernier trinôme obtenu, le discriminant vaut $\Delta = 256$ et le coefficient dominant est positif, donc le trinôme est négatif entre ses racines $x_{1,2} = \dfrac{-26 \pm \sqrt{\Delta}}{2 \times 3} = -7, -\dfrac{5}{3}$.

Raccourci : $(x-1)^2 \geq 4(x+3)^2 \iff (x-1-2(x+3))(x-1+2(x+3)) \geq 0 \iff (-x-7)(3x+5) \geq 0$ avec l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$...

L'ensemble des solutions est donc $\left[-7; -\dfrac{5}{3}\right] \setminus \{-3\}$, autrement dit $\boxed{[-7; -3[\cup \left]-3; \dfrac{5}{3}\right].}$

Remarque : on peut aussi procéder par disjonction de cas en fonction des signes de $x-1$ et $x+3$, mais il faut bien s'organiser !

(b) $\sqrt{18-x} + \sqrt{7+x} = 7$: L'équation est définie lorsque $18 - x \geq 0$ et $x + 7 \geq 0$, c'est-à-dire lorsque $x \in D = [-7, 18]$. Procédons par analyse et synthèse.

Analyse. Supposons x dans D solution de l'équation.

Comme $\sqrt{18-x}+\sqrt{7+x} = 7$, en élevant au carré on obtient : $18-x+7+x+2\sqrt{(18-x)(7+x)} = 49$.
En réorganisant et divisant par 2, cela donne $12 = \sqrt{(18-x)(7+x)}$,
qu'on élève à nouveau au carré : $144 = (18-x)(7+x)$,
et cela résulte en une dernière équation du second degré : $x^2 - 11x + 18 = 0$.

On résout cette équation à l'aide du discriminant pour obtenir que $x = 2$ ou $x = 9$.

Synthèse. Si $x = 2$ ou 9, alors $x \in D$ et est solution de l'équation.

Conclusion. L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\{2, 9\}.}$

Exercice 2

1. Le tableau est le suivant :

n	1	2	3	4	5	6
T_n	-1	$\frac{3}{2}$	-2	$\frac{5}{2}$	-3	$\frac{7}{2}$

2. Il semblerait que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $T_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{2}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $T_n = -1^2 + 2^2 - 3^2 + \cdots + (-1)^n n^2$, donc
$$(n+1)T_{n+1} = -1^2 + 2^2 - 3^2 + \cdots + (-1)^n n^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 = \boxed{nT_n + (-1)^{n+1}(n+1)^2.}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'assertion $T_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{2}$. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n$.
__Initialisation.__ On a $(-1)^{\frac{1+1}{2}} = -1 = T_1$, d'où P_1.
__Hérédité.__ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n. Montrons P_{n+1}. On a
$$\begin{aligned} (n+1)T_{n+1} &= nT_n + (-1)^{n+1}(n+1)^2 && \text{(ques. préc.)} \\ &= n(-1)^n \frac{n+1}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 && \text{(d'après } P_n) \\ \text{donc} \quad T_{n+1} &= (-1)^n \frac{n}{2} + (-1)^{n+1}(n+1) \\ &= (-1)^n \left[\frac{n}{2} - (n+1)\right] \\ &= (-1)^n \left(-\frac{n+2}{2}\right) = (-1)^{n+1}\frac{n+2}{2} \end{aligned}$$
ce qui montre P_{n+1}.
__Conclusion.__ On a montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^\star,\ T_n = (-1)^n \frac{n+1}{2}.}$

Exercice 3

Après avoir calculé les premiers termes, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l'assertion $u_n = n$.
Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ par récurrence forte.
__Initialisation.__ On a $P(1)$ par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
__Hérédité.__ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall j \in [\![1, n]\!], P(j)$. Montrons $P(n+1)$.
On distingue deux cas.

► Supposons $n+1$ pair.

On peut alors trouver $k \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2k$. Comme $1 \leq n$, $1 \leq \dfrac{n+1}{2} \leq n$ donc $k \in [\![1, n]\!]$ et $P(k)$ est vrai.

On a alors $u_{n+1} = u_{2k} \underbrace{=}_{\text{définition}} 2\,u_k \underbrace{=}_{P(k)} 2k = n+1$.

► Supposons $n+1$ impair, c'est-à-dire n pair.

On peut alors trouver $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Comme $n \neq 0$, k est non nul et $k = \dfrac{n}{2} < n$. Comme k est entier, on en déduit que k et $k+1$ sont compris entre 1 et n, et donc $P(k)$ et $P(k+1)$ sont vrais.

On a alors $u_{n+1} = u_{2k+1} \underbrace{=}_{\text{définition}} u_k + u_{k+1} \underbrace{=}_{P(k) \text{ et } P(k+1)} k + (k+1) = n+1$.

Dans les deux cas, on a montré $u_{n+1} = n+1$. Cela montre $P(n+1)$.
__Conclusion.__ On a montré par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = n.}$