# Devoir maison 2

corrigé le vendredi 4 octobre

## Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x-1} + \sqrt{|x-2|}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2. Déterminer l'ensemble sur lequel $f$ est dérivable.
3. Pour $x < 2$, et lorsque c'est possible, calculer $f'(x)$.
4. Soit $x \in ]1, 2[$. Montrer que $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} < \sqrt{2-x}$. En déduire le signe de $f'$ sur $]1, 2[$.
5. Déterminer les variations de $f$ sur $[2, +\infty[$.
6. Dresser le tableau de variations de $f$.
7. Tracer le graphe de $f$.

## Exercice 2 : Minoration d'Oresme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.
3. En utilisant les outils du lycée, qu'en déduit-on sur la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ?

# Exercice 3 : Inversion de Möbius-Pascal

1. **La formule.**

   (a) Soit $0 \leq k \leq n$ deux entiers naturels.

   En faisant attention aux cas particuliers, calculer la somme

$$\mu(k,n) = \sum_{q=0}^{n-k} (-1)^q \binom{n}{q} \binom{n-q}{k}.$$

   (b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On définit sa *transformée binomiale* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \right)_{n\in\mathbb{N}}$.

   En utilisant la question précédente, montrer la *formule d'inversion*

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} b_p.$$

2. **Une application.** On considère la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$e_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, e_n = n\, e_{n-1} + (-1)^n.$$

   On considère aussi sa transformée binomiale $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e_k \right)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) Après avoir calculé $(e_n)_{n=0}^{5}$ et en avoir déduit $(f_n)_{n=0}^{5}$, donner (en la démontrant !) une expression pour $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, e_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.