Devoir maison 2 - Corrigé

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x-1} + \sqrt{|x-2|}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ est défini lorsque $x - 1 \geq 0$, donc l'ensemble de définition de f est $[1, +\infty[$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. f est dérivable en x lorsque $x - 1 > 0$ et $|x-2| > 0$, donc sur $]1, 2[\cup]2, +\infty[$.

3. Soit $x \in]1, 2[$. On a : $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$, donc, d'après la formule de dérivation d'une composée : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}$.

4. D'après le calcul précédent :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} > \frac{1}{\sqrt{2-x}} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} < \sqrt{2-x}.$$

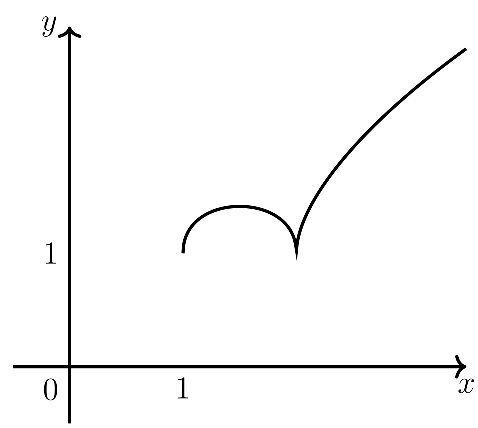
   Par conséquent, comme $x - 1 > 0$ et $2 - x > 0$:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 < 2 - x \Leftrightarrow 2x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}.$$

   Donc f' est strictement positive sur $\left]1, \dfrac{3}{2}\right[$ et négative sur $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right[$.

5. Pour tout x dans $[2, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$, donc f est la somme de deux fonctions croissante, donc est croissante sur $[2, +\infty[$.

x	1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
			$\sqrt{2}$				$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	1				1		



Exercice 2 : Minoration d'Oresme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   On a $H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ par la relation de Chasles.

   Par minoration brutale, on a donc
$$H_{2n} - H_n \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

2. On peut faire une preuve par récurrence. On va utiliser le télescopage, ce qui revient au même.

   On a
$$\begin{aligned} H_{2^n} - H_1 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(H_{2^{k+1}} - H_{2^k}\right) && \text{(télescopage)} \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} && \text{(ques. préc., car } \forall k \in \mathbb{N}, 2^k \in \mathbb{N}^*) \\ &\geq \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

   Ainsi, $H_{2^n} \geq H_1 + \frac{n}{2} = 1 + \frac{n}{2}$.

3. La suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est clairement croissante. La question précédente entraîne qu'elle est non majorée. On en déduit $H_n \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$.

Exercice 3 : Inversion de Möbius-Pascal

1. **La formule.**

   (a) Pour tout $q \in [\![0, n-k]\!]$ on a
$$\binom{n}{q}\binom{n-q}{k} = \frac{n!}{q!\,(n-q)!}\,\frac{(n-q)!}{k!\,(n-q-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{q!\,(n-q-k)!} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{q}.$$

   Ainsi :
$$\begin{aligned} \mu(k,n) &= \sum_{q=0}^{n-k} (-1)^q \binom{n}{q}\binom{n-q}{k} = \binom{n}{k} \sum_{q=0}^{n-q} (-1)^q \binom{n-k}{q} && \text{(binôme de Newton)} \\ &= \binom{n}{k} (1-1)^{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n > k. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}b_p &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a_k \\
&= \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\binom{p}{k}a_k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=k}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\binom{p}{k}a_k.
\end{aligned}$$

Or, pour tous $0 \leq k \leq n$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{p=k}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\binom{p}{k} &= \sum_{q=0}^{n-k}(-1)^{q}\binom{n}{n-q}\binom{n-q}{k} && \begin{bmatrix} q = n-p \\ p = n-q \end{bmatrix} \\
&= \sum_{q=0}^{n-k}(-1)^{q}\binom{n}{q}\binom{n-q}{k} && \begin{bmatrix} q = n-p \\ p = n-q \end{bmatrix} \\
&= \mu(k,n).
\end{aligned}$$

On peut reprendre le calcul :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}b_p &= \sum_{k=0}^{n}\mu(k,n)a_k \\
&= \mu(n,n)a_n && (\text{car } \mu(k,n) = 0 \text{ dès que } k < n) \\
&= a_n.
\end{aligned}$$

2. (a) On trouve facilement les premières valeurs de la suite e :

$$e_0 = 1, \qquad e_1 = 0, \qquad e_2 = 1, \qquad e_3 = 2, \qquad e_4 = 9, \qquad e_5 = 44\ldots$$

et on en déduit

$$\begin{aligned}
f_0 &= 1 \times 1 && = 1 \\
f_1 &= 1 \times 1 + 1 \times 0 && = 1 \\
f_2 &= 1 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times 1 && = 2 \\
f_3 &= 1 \times 1 + 3 \times 0 + 3 \times 1 + 1 \times 2 && = 6 \\
f_4 &= 1 \times 1 + 4 \times 0 + 6 \times 1 + 4 \times 2 + 1 \times 9 && = 24 \\
f_5 &= 1 \times 1 + 5 \times 0 + 10 \times 1 + 10 \times 2 + 5 \times 9 + 1 \times 44 && = 120.
\end{aligned}$$

À partir de là, la conjecture est raisonnable.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} e_k \\
&= \binom{n+1}{0} e_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} e_k && \text{(Chasles)} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(k\, e_{k-1} + (-1)^k\right) && \text{(définition de } e\text{)} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n+1}{k} \binom{n}{k-1} k\, e_{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} && \text{(linéarité et formule d'absorption)} \\
&= (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} e_{k-1} + \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} && \text{(Chasles)} \\
&= (n+1) \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} e_\ell + (1-1)^{n+1} && \begin{bmatrix} \ell = k-1 \\ k = \ell+1 \end{bmatrix} \\
&= (n+1) f_n. && \text{(car } n+1>0\text{)}
\end{aligned}$$

Une récurrence immédiate montre alors $\forall n \in \mathbb{N}, f_n = n!$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant la formule d'absorption.

$$\begin{aligned}
e_n &= \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} f_p \\
&= \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} p! \\
&= \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \frac{n!}{(n-p)!} \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. && \begin{bmatrix} k = n-p \\ p = n-k \end{bmatrix}
\end{aligned}$$